Theoretische Physik II	**Probeklausur**	3.7.2012

[Spickzettel bereitlegen ; Wecker auf 2 Stunden stellen ; Alle Aufgaben lesen, selektiv bearbeiten]
[Nach 2h Blatt umdrehen, korrigieren ; 50 Punkte, bei $\geq$ 25 hätten Sie bestanden]

Aufgabe 1: (18 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Potential

$$V(r) = -A\,\delta(r-a)\ ,$$

wobei A, a positive reelle Konstanten sind. Finden Sie die Wellenfunktionen und Energien der gebundenen Zustände für S-Zustände (also $E < 0$ und $\ell = 0$).

[Hinweis: Sie müssen die Wellenfunktionen nicht normieren.]

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Berechnen Sie die Verschiebung der Grundzustandsenergie eines eindimensionalen harmonischen Oszillators, der jeweils die folgenden kleinen Störungen erfährt (A, B sind Konstanten):

(a) $\hat{H}_1 = A\,\hat{x}^4$,

(b) $\hat{H}_1 = B\,\hat{p}^4$,

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Sei $\hat{\vec{L}}$ ein Drehimpulsoperator und $\hat{L}_3|m\rangle = \hbar m|m\rangle$. Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte:

(a) $\langle m|\hat{L}_1|m\rangle$ sowie $\langle m|\hat{L}_2|m\rangle$,

(b) $\langle m|\hat{L}_1^2 - \hat{L}_2^2|m\rangle$,

(c) $\langle m|\hat{L}_1\hat{L}_2 + \hat{L}_2\hat{L}_1|m\rangle$.

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Unter welchen Bedingungen beschreibt die Matrix

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

den statistischen Operator eines reinen Zustandes?

Theoretische Physik II	**Probeklausur**	Lösung

Aufgabe 1:
Strategie: löse Schrödinger-Glg in Kugelkoord, $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r\right)+\frac{1}{2mr^2}\hat{\vec{L}}^2+V(r)\right]\psi=E\psi$, in den Bereichen I $(0<r<a)$ und II $(r>a)$; Anschlussbed. bei $r=a$, Delta per Integral!
Ansatz: $\psi(\vec{r})=\frac{u_{n\ell}(r)}{r}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ für $\ell=0$ in SG $\Rightarrow$ $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_r^2+V(r)\right]u_{n0}(r)=E\,u_{n0}(r)$
Bereichs-Lsn: $u_I=B\sinh(\kappa r)$, $u_{II}=C\,e^{-\kappa r}$ wegen Randbed $u(0)=0=u(\infty)$, mit $\kappa\equiv\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$
Stetigkeit bei $r=a$: $B\sinh(\kappa a)=C\,e^{-\kappa a}\Rightarrow C=\frac{B}{2}\left(e^{2\kappa a}-1\right)$
bilde $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$(SG): $-\frac{\hbar^2}{2m}u'_{II}(a)+\frac{\hbar^2}{2m}u'_I(a)-Au(a)=0\Leftrightarrow-\kappa\,C\,e^{-\kappa a}-\kappa\,B\cosh(\kappa a)=-\frac{2mA}{\hbar^2}\,B\sinh(\kappa a)$
C einsetzen, vereinfachen $\Rightarrow\frac{\hbar^2\kappa}{mA}=1-e^{-2\kappa a}$ (*) ist Bedingung an κ alias E (Lsg graphisch über $2\kappa a$-Achse: lhs=Gerade durch Ursprung, rhs steigt von 0 asymptotisch auf 1; kein Schnittpkt für $\hbar^2<2amA$; genau ein Bindungszustand sonst)
insgesamt also ($Y_{00}=$const): $\psi_I=D\,\frac{\sinh(\kappa r)}{r}$ und $\psi_{II}=D(e^{2\kappa a}-1)\frac{e^{-\kappa r}}{2r}$ mit D aus Norm, und κ bzw E aus graphischer Lsg von (*)

Aufgabe 2:
benutze Erzeugungs- und Vernichtungs-Op's des harm.Osz, $a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x+\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,p$; $a^\dagger=..-..$, sowie Normierung $a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$; $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$
(a) $E_0^{(1)}=\langle 0|H_1|0\rangle=A\langle 0|x^4|0\rangle=\frac{A\hbar^2}{4m^2\omega^2}\langle 0|(a+a^\dagger)^4|0\rangle=$
$=\frac{A\hbar^2}{4m^2\omega^2}\langle 0|aaa^\dagger a^\dagger+aa^\dagger aa^\dagger+\mathrm{Nullen}|0\rangle=(2+1)\frac{A\hbar^2}{4m^2\omega^2}=\frac{3A\hbar^2}{4m^2\omega^2}$
(b) geht genauso (und stellt eine relativistische Korrektur zur kinetischen Energie dar):
$E_0^{(1)}=B\langle 0|p^4|0\rangle=\frac{Bm^2\omega^2\hbar^2}{4}\langle 0|(a^\dagger-a)^4|0\rangle=$
$=\frac{Bm^2\omega^2\hbar^2}{4}\langle 0|aaa^\dagger a^\dagger+aa^\dagger aa^\dagger+\mathrm{Nullen}|0\rangle=\frac{3Bm^2\omega^2\hbar^2}{4}$

Aufgabe 3:
benutze Leiterop's $L_\pm=L_1\pm L_2$, wobei $L_\pm|m\rangle\sim|m\pm 1\rangle$, sowie Orthogonalität $\langle m|m\pm 1\rangle=0$
(a) $\langle m|L_1|m\rangle=\frac{1}{2}\langle m|L_++L_-|m\rangle=0$ und $\langle m|L_2|m\rangle=\frac{1}{2i}\langle m|L_+-L_-|m\rangle=0$
(b) $=\frac{1}{4}\langle m|(L_++L_-)^2+(L_+-L_-)^2|m\rangle=\frac{1}{2}\langle m|L_+^2-L_-^2|m\rangle=0$
(c) $=\frac{1}{4i}\langle m|(L_++L_-)(L_+-L_-)+(L_+-L_-)(L_++L_-)|m\rangle=\frac{1}{2i}\langle m|L_+^2+L_-^2|m\rangle=0$

Aufgabe 4:
Bedingungen: (a) $\rho^\dagger=\rho$ (b) $\mathrm{Sp}(\rho)=1$ (c) $\rho^2=\rho$
es folgt (a): a,d,e reell; $c=b^*$ (b): $a+d+e=1$ (c): $\rho^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & (a+d)b & 0\\ (a+d)c & bc+d^2 & 0\\ 0 & 0 & e^2\end{pmatrix}$
wegen (c) muss $e\in\{0,1\}$ sein, zwei Fälle:
<u>$e=1$</u>: (b) $\Rightarrow$ a+d=0; (c) $\Rightarrow$ $b=0=c$, $a=0$, also $\rho=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
<u>$e=0$</u>: (b) $\Rightarrow$ a+d=1; (c) $\Rightarrow$ $a=a^2+b^*b\Rightarrow a(1-a)\geq 0\Rightarrow a\in[0..1]$ und $b^*b=a(1-a)\Rightarrow$
$b=\sqrt{a(1-a)}\,e^{i\varphi}$, also $\rho=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ b^* & 1-a & 0\\ 0&0&0\end{pmatrix}$ mit $a\in[0..1]$ und $b=\sqrt{a(1-a)}\,e^{i\varphi}$, φ bel.