Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 12**	19.6.2012

[Abgabe 26.6. in der Vorlesung; Besprechung 29.6. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

Aufgabe 36:

Sei $a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ die genaue Version des Bohr-Radius (also mit reduzierter Masse μ statt Elektronenmasse), und $R_{n\ell}$ die Radialwellenfunktion für den Zustand mit Hauptquantenzahl n und Bahndrehimpuls ℓ. Bestimmen Sie, ausgehend von den Herleitungen im Abschnitt 5.2 der Vorlesung, die normierten Radialwellenfunktionen

(a) $R_{10}(r)$ [Lösung: $2(Z/a)^{3/2}\exp(-Zr/a)$]

(b) $R_{20}(r)$ [Lösung: $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z/a)^{3/2}(1-Zr/2a)\exp(-Zr/2a)$]

(c) $R_{21}(r)$ [Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{6}}(Z/a)^{5/2}\,r\,\exp(-Zr/2a)$]

Fertigen Sie eine Skizze ihrer Lösungen an; Wieviele Knoten hat die Kurve jeweils?

***Aufgabe* 37:** (2+3+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Bohr-Radius (die genaue Version $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ aus Aufgabe 36) den wahrscheinlichsten Wert des Elektron-Proton-Abstandes im Grundzustand des Wasserstoffatoms darstellt, d.h. dass $r^2 R_{10}^2$ für $r = a$ maximal wird.

(b) Bestimmen Sie den minimalen Wert des effektiven Potentials

$$V_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \ ,$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit den aus der Vorlesung bekannten Energie-Eigenwerten des Wasserstoffatoms. Wie kann die Beziehung $n > \ell$ in dieser Hinsicht "verstanden" werden?

(c) Verifizieren Sie die Formel für die Energie E_φ des in der Vorlesung (Skript S. 65) behandelten Variationsansatzes für die Wellenfunktion der beiden Elektronen des Helium-Atoms.

Aufgabe 38:

Berechnen Sie den Energie-Eigenwert E_0 des Grundzustandes des dreidimensionalen harmonischen Oszillators, also für das Potential $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$, wobei $r = |\vec{r}|$ ist.