Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 09**	29.5.2012

[Abgabe 5.6. in der Vorlesung; Besprechung 8.6. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 27:** ((2+1)+(1+2+2+1+1)=10 Punkte)

(a) Die Komponenten des Bahndrehimpuls-Operators sind $\hat{L}_j = (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}})_j = \epsilon_{jkm}\hat{r}_k\hat{p}_m$ [Einstein-Konvention: Summation über $k, m = 1, 2, 3$ impliziert]. Ausgehend von den Vertauschungsrelationen $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k]$ und $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ können Sie nun die folgenden Vertauschungsrelationen verifizieren:

(a1) $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{jkm}\hat{L}_m$ [Einstein-Konvention für m]

(a2) $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_j] = [\hat{\vec{r}}^2, \hat{L}_j] = [\hat{\vec{p}}^2, \hat{L}_j] = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

(b) Betrachten Sie die Ortsdarstellung der Drehimpuls-Eigenzustände in Kugelkoordinaten.

(b1) Wie lautet die normierte Kugelflächenfunktion $Y_{0,0}(\vartheta, \varphi)$?

(b2) Bestimmen Sie $Y_{1,1}(\vartheta, \varphi)$ mit Hilfe der Gleichung $\hat{L}_+ Y_{1,1}(\vartheta, \varphi) = 0$ (wobei $\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + i\hat{L}_2$) und der Normierungsbedingung.

(b3) Ausgehend von $Y_{1,1}(\vartheta, \varphi)$ können Sie nun $\hat{L}_- = \hat{L}_1 - i\hat{L}_2$ benutzen, um $Y_{1,0}(\vartheta, \varphi)$ und $Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi)$ zu erhalten.

(b4) Verifizieren Sie, dass in der Tat $\hat{L}_- Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi) = 0$ ist.

(b5) Wie sehen die zu $Y_{1,\pm1}$ und $Y_{1,0}$ gehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten aus? [Für Mathematica-Fans: Es gibt dort die Funktion `SphericalHarmonicY`; eine 3D-Darstellung von Funktionen in Kugelkoordinaten ist z.B. durch `ParametricPlot3D` möglich; ein Beispiel ist auf der Vorl-Homepage.]

Aufgabe 28:

In der Vorlesung waren die drei Matrizen Σ_j mit Komponenten $(\Sigma_j)_{km} \equiv -i\epsilon_{jkm}$, also

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Generatoren von infinitesimalen Drehungen [$R(\vec{n}, \alpha) \approx \mathbb{1} - i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}$ für $|\alpha| \ll 1$] eingeführt worden.

(a) Zeigen Sie, dass $[\Sigma_j, \Sigma_k] = i\epsilon_{jkm}\Sigma_m$ gilt [Einstein-Konvention: Summation über $m = 1, 2, 3$ impliziert].

(b) Sei die Drehachse $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann für einen beliebigen (also auch großen) Winkel α die Rotation als $R(\vec{n}, \alpha) = \exp(-i\alpha\vec{n} \cdot \vec{\Sigma})$ geschrieben werden kann. [Hinweis: gehen Sie von der Darstellung in Aufgabe 26 aus.]

Aufgabe 29:

Betrachten Sie den Bahndrehimpuls-Operator $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$ in der Ortsdarstellung, und zwar in Kugelkoordinaten $\vec{r} = r(Sc, Ss, C)$ mit $S = \sin(\vartheta), C = \cos(\vartheta)$ und $s = \sin(\varphi), c = \cos(\varphi)$. Leiten Sie seine kartesischen Komponenten her:

$$\hat{L}_1 = -i\hbar\left(-s\,\partial_\vartheta - \frac{Cc}{S}\,\partial_\varphi\right) \quad , \quad \hat{L}_2 = -i\hbar\left(c\,\partial_\vartheta - \frac{Cs}{S}\,\partial_\varphi\right) \quad , \quad \hat{L}_3 = -i\hbar\,\partial_\varphi\,.$$