Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 08**	22.5.2012

[Abgabe 29.5. in der Vorlesung; Besprechung 1.6. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 23:** (2+2+2+4=10 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator, mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \; .$$

(a) Seien wie in der Vorlesung $\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}$ und $\hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}$, und seinen $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H}$ mit $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ und $\hat{a} = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$. Bestimmen Sie, für den Zustand $|n\rangle$,

(a1) $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$,

(a2) $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$,

(a3) $\Delta x\,\Delta p$.

(b) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator nun im Heisenberg-Bild: es gelten die Bewegungsgleichungen $i\hbar\partial_t\hat{x}_H = [\hat{x}_H, \hat{H}]$ und $i\hbar\partial_t\hat{p}_H = [\hat{p}_H, \hat{H}]$. Wenn Sie nun $\hat{H}$ mit $\hat{x}_H, \hat{p}_H$ statt $\hat{x}, \hat{p}$ ausdrücken und den Kommutator $[\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)] = i\hbar$ benutzen, können Sie die Lösung für $\hat{x}_H(t)$ leicht bestimmen. [Die richtige Lösung kennen Sie schon aus Aufgabe 22.]

Aufgabe 24:

Zur Erinnerung: Die Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren des harmonischen Oszillators genügen $[\hat{a}, \hat{a}] = 0 = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]$ sowie $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, und die Eigenwerte des Operators $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ sind die nicht-negativen ganzen Zahlen.
Betrachten Sie nun die Algebra $\{\hat{b}, \hat{b}\} = 0 = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\}$, $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ und definieren $\hat{Q} \equiv \hat{b}^\dagger\hat{b}$.

(a) Was für ein Spektrum und welche Eigenzustände hat $\hat{Q}$?

(b) Welche Physik könnte dahinterstecken?

[Der Antikommutator ist als $\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ definiert.]

Aufgabe 25:

Sei $\hat{p}$ ein Projektionsoperator [also $\hat{p}^2 = \hat{p}$]. Zeigen Sie, dass

(a) die einzig möglichen Eigenwerte von $\hat{p}$ gleich 0 und 1 sind;

(b) es nur einen linear unabhängigen Zustand mit Eigenwert 1 gibt (Annahme $\mathrm{Sp}(\hat{p}) = 1$).

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass für eine Drehung um die Achse $\vec{n}$ mit Drehwinkel α gilt:

$$\vec{r}\,' = R(\vec{n}, \alpha)\,\vec{r} = \cos(\alpha)\,\vec{r} + [1 - \cos(\alpha)]\,(\vec{n}\cdot\vec{r}\,)\,\vec{n} + \sin(\alpha)\,\vec{n}\times\vec{r} \; .$$