Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 07**	15.5.2012

[Abgabe 22.5. in der Vorlesung; Besprechung 25.5. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 20:** (2+2+1+2+3=10 Punkte)

(a) Ausgehend von der formalen Lösung $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$ der Schrödinger-Gleichung können Sie nun auch die in der Vorlesung hergeleitete Von-Neumann-Gleichung $i\hbar\partial_t\hat{\rho} = [\hat{H},\hat{\rho}]$ lösen, welche für statistische Operatoren $\hat{\rho}(t)$ [im Schrödinger-Bild] gilt.

(a1) $\hat{\rho}(t) = ?$

(a2) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}^2]$ zeitunabängig ist. [Hinweis: Die Spur ist zyklisch, vgl. Aufgabe 21a.]
(Also bleibt ein reiner/gemischter Zustand rein/gemischt!)

(b) Betrachten Sie einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, der aus nur zwei Zuständen besteht. Diese seien mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bezeichnet. Sei $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\alpha}|0\rangle + e^{i\beta}|1\rangle\right)$ ein reiner Zustand in $\mathcal{H}$.

(b1) Können Sie die folgende Notation erklären?

$$\hat{\rho}(\psi) \equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\beta-\alpha)} & 1 \end{pmatrix}$$

(b2) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}(\psi)] = 1$ und $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}^2(\psi)] = 1$.

(b3) Zeigen Sie, dass für

$$\hat{\rho}_{\mathrm{Gemisch}} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha\ \hat{\rho}(\psi)$$

zwar wieder $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}_{\mathrm{Gemisch}}] = 1$, nun aber $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}^2_{\mathrm{Gemisch}}] < 1$ gilt.

Aufgabe 21:

Seien ein statistischer Operator $\hat{\rho}$ [also $\hat{\rho} = \sum_n |\psi_n\rangle p_n\langle\psi_n|$ mit $0 \le p_n \le 1$ und $\sum_n p_n = 1$] sowie zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und ein reiner Zustand $|\psi\rangle$ gegeben. Zeigen Sie, dass im Hilbert-Raum gilt:

(a) $\mathrm{Sp}[\hat{A}\hat{B}] = \mathrm{Sp}[\hat{B}\hat{A}]$

(b) $\mathrm{Sp}[|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}] = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

(c) $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$

(d) $\mathrm{Sp}[\hat{\rho}] = 1$

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe 14 den Heisenberg-Operator

$$\hat{x}_H(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\hat{x}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) ,$$

wobei $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist.