Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 06**	8.5.2012

[Abgabe 15.5. in der Vorlesung; Besprechung 18.5. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 16:** (6+4=10 Punkte)

(a) Beweisen Sie die allgemeine Unschärferelation aus der Vorlesung (vgl. Skript S.32)

$$\Delta A\ \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle\right| \ ,$$

unter den dort genannten Voraussetzungen: $\hat{A}$,$\hat{B}$ sind Observablen, die Varianzen sind wie üblich als $(\Delta A)^2 \equiv \langle\psi|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle$ definiert, und der Operator $\hat{C} \equiv \frac{1}{i}[\hat{A},\hat{B}]$. Benutzen Sie dabei die Schwarz'sche Ungleichung $||\psi||^2\ ||\chi||^2 \geq |\langle\psi|\chi\rangle|^2$ für Vektoren $|\psi\rangle$,$|\chi\rangle$ des Hilbertraumes.

(b) Seien $\hat{A}$,$\hat{B}$ zwei Operatoren, für die $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0 = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]$ gilt. Beweisen Sie unter dieser Voraussetzung einen Spezialfall der *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*, nämlich

$$e^{\hat{A}}\ e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]/2} \ .$$

Betrachten Sie dazu z.B. die Funktion $\hat{G}(t) = \exp[t\hat{A}]\ \exp[t\hat{B}]$ und zeigen Sie zunächst, dass diese einer Differentialgleichung der Form $\partial_t\,\hat{G}(t) = \hat{M}(t)\,\hat{G}(t)$ genügt. [Hinweis: Sicherlich hilft Aufgabe 14 des letzten Übungsblattes.] Diese Differentialgleichung erster Ordnung (Randbedingung?) können Sie dann leicht lösen.

Aufgabe 17:

Damit wir ebene Wellen als normierte Zustände des Hilbertraums betrachten können, müssen sie *regularisiert* werden. Für die 1D ebenen Wellen $\psi(x) = C\ \exp(ikx)$ kann man das z.B. durch Einführung eines sehr großen Kastens der Breite L und der Forderung periodischer Randbedingungen $\psi(x+L) = \psi(x)$ erreichen. Welches sind die erlaubten k-Werte in diesem Fall? Bestimmen Sie die Konstante C aus der Normierungsbedingung $\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}x\ \psi_k^*(x)\,\psi_q(x) = \delta_{kq}$.

Aufgabe 18:

(a) Wenn $V(\hat{x})$ ein Polynom in $\hat{x}$ ist, was ist dann $[\hat{p},V(\hat{x})]$?

(b) Zeigen Sie, ausgehend vom Ehrenfest-Theorem $i\hbar\partial_t\langle\hat{A}\rangle = \langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$ und dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$, dass quantenmechanische Erwartungswerte eine nahezu klassische Gleichung erfüllen: $m\,\partial_t^2\langle\hat{x}\rangle = -\langle V'(\hat{x})\rangle$. Was ist der Unterschied zur klassischen Dynamik?

Aufgabe 19:

Untersuchen Sie die stehenden Wellen $\psi(\vec{r}) = C\ \sin(k_1x)\ \sin(k_2y)\ \sin(k_3z)$ als reelle Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung in einem 3D-Kubus der Kantenlänge L.

(a) Bestimmen Sie die erlaubten Energieniveaus E unter der Randbedingung, dass $\psi(\vec{r})$ an der Oberfläche des Würfels $(0 \leq x,y,z \leq L)$ verschwindet, sowie den Normierungsfaktor C.

(b) Ordnen Sie die Energie-Eigenwerte in einer Tabelle nach steigenden Werten von E/ε mit $\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ an. Gehen Sie bis zu $E = 36\varepsilon$, und geben Sie jeweils die Entartung (also die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen zu E) an.