Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 05**	3.5.2012

[Abgabe 8.5. in der Vorlesung; Besprechung 11.5. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 13:** (2+1+2+4+1=10 Punkte)

Zwei weitere 1D-Probleme:

(a) Untersuchen Sie den Effekt der Feldemission (wie z.B. für eine Schottky-Diode in der Halbleiterphysik). Dazu verwenden Sie als ein grobes Modell für Elektronen in einem Metall ($x < 0$) mit äußerem elektrischen Feld E_x (im Bereich $x > 0$) das Potential $V(x < 0) = -V_0$ und $V(x \geq 0) = -eE_x x$. Wie groß ist laut Gamow-Formel die Tunnelwahrscheinlichkeit T von Elektronen mit Energien $-V_0 < E_{\mathrm{el}} < 0$?

(b) Berechnen Sie den Wert von T für $E_{\mathrm{el}} = -4.5\,\mathrm{eV}$ und die Felder $E_x = 5 \times 10^6\,\mathrm{V/cm}$ und $E_x = 5 \times 10^7\,\mathrm{V/cm}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Potential $V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \frac{1}{[\cosh(ax)]^2}$ einen Bindungszustand mit der Wellenfunktion $\psi_0(x) = A/\cosh(ax)$ hat. Finden Sie dessen Energie E_0, normieren Sie ψ_0 und skizzieren Sie diese Lösung.

(d) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Potential aus (c) für positive Energien $E > 0$. [Hinweis: Dabei können Sie z.B. wie folgt vorgehen: Per Ansatz $\psi(x) = \varphi(\tanh(ax))\, e^{ikx}$ mit $k \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$ verschaffen Sie sich eine Differentialgleichung für $\varphi(t)$ in der Variablen $t \equiv \tanh(ax)$. Mit Potenzreihenansatz und Abbruchbedingung (d.h. die Potenzreihe für $\varphi(t)$ soll nur endlich viele Terme enthalten) erhalten Sie dann eine elementare Lösung.]

(e) Wie verhält sich Ihre Lösung aus (d) bei $x \to -\infty$? Was bedeutet das für Transmissions- und Reflexions-Koeffizienten?

Aufgabe 14:

Funktionen von Operatoren werden formal durch ihre Taylorreihe definiert, also z.B.

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n .$$

Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ sowie eine komplexe Zahl $t \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{t\hat{A}}\, \hat{B}\, e^{-t\hat{A}} = \hat{B} + t\,[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{t^2}{2!}\,[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{t^3}{3!}\,[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$$

Aufgabe 15:

Zwischen den Operatoren $\hat{p}$ (Impulskomponente in x-Richtung) und $\hat{x}$ besteht die Vertauschungsrelation $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$, wie man leicht an der Realisierung $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ nachprüfen kann. Übertragen Sie die klassische Größe px in einen hermiteschen Operator.