Übungen zur Theoretischen Physik II	**Blatt Nr. 02**	10.4.2012

[Abgabe 17.4. in der Vorlesung; Besprechung 20.4. in den Übungen]
[Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135)]

***Aufgabe* 4:** (1+1+3+2+3=10 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Gauß'sches Wellenpaket ($d, k_0, x_0 \in \mathbb{R}$),

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \phi(k)\, e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)} \quad , \quad \phi(k) = N\, e^{-d^2(k-k_0)^2 - ikx_0} \ .$$

(a) Löst diese Wellenfunktion die freie Schrödinger-Gleichung?

(b) Skizzieren Sie $|\phi(k)|^2$. Welche Eigenschaften dieser Kurve werden durch die Konstanten k_0 und d beschrieben?

(c) Mit $\int \mathrm{d}k\, e^{-k^2} = \sqrt{\pi}$ können Sie das k-Integral sogar exakt lösen. $|\psi(x,t)|^2$ ist wieder eine Gaußkurve, und zwar mit welchem Schwerpunkt und welcher Standardabweichung?
[Hinweis: Eine Kurve der Form $f(x) \sim e^{-(x-x_0)^2/2b^2}$ nennt man *Gaußkurve* um den Schwerpunkt $x = x_0$ mit Standardabweichung b^2. Ihre (volle Halbwerts-) Breite beträgt offensichtlich $2\sqrt{2b^2 \ln 2}$.]

(d) Da die Breite des Wellenpakets zeitabhängig ist, "zerfließt" es. Wie lange dauert es, bis sich die Breite

– eines Sandkorns ($m \approx 1$ mg; $d \approx 1$ mm)
– eines Alphateilchens (${}^4_2\mathrm{He}^{++}$; $m \approx ?$, $d \approx 10^{-13}$ m)

jeweils verdoppelt hat? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Alter des Universums.

(e) Berechnen Sie die Mittelwerte und Varianzen $\langle x \rangle$, $(\Delta x)^2$, $\langle p \rangle$ und $(\Delta p)^2$ von $\psi(x,t)$.

Aufgabe 5:

(a) Verifizieren Sie durch direktes Einsetzen, dass die reellen Funktionen $\psi_1 = N\,\sin(kx - \omega t)$ und $\psi_2 = N\,\cos(kx - \omega t)$ *keine* Lösungen der Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen sind.

(b) Verifizieren Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t) = N\,e^{i(kx-\omega t)} - N\,e^{-i(kx+\omega t)}$ (mit $N \in \mathbb{C}$) die freie Schrödinger-Gleichung löst, falls $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/2m$ gilt. Zeigen Sie, dass $\psi(x,t) = 2iN\sin(kx)\, e^{-i\omega t}$. Was für eine Art Welle ist das?

(c) In der QM repäsentiert man ein freies Teilchen mit Impuls p und Energie E durch die Wellenfunktion $\psi(x,t) = N\,e^{i(px-Et)/\hbar}$. Physiker auf einem anderen Planeten könnten die Konvention $\psi(x,t) = N\,e^{-i(px-Et)/\hbar}$ benutzen. Welche Form hat deren Schrödinger-Gleichung folglich?

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie für ein eindimensionales System mit Wellenfunktion $\psi(x) = \frac{N}{x^2+a^2}$ (mit $a \in \mathbb{R}$)

– die Normierungskonstante N,
– die Wellenfunktion im Impulsraum $\widetilde{\psi}(k)$,
– die Mittelwerte $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$.