8. Ausblick / "Märchen"

weitere Themen in der nichtrelativistischen QM [→ QM II : ≥5. Sem.]

(individ. Ergänzung)

- zeitabhängige Störungstheorie $\left(\left(\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1(t) \right)\right)$

  Hamilton-Op. $\hat{H}_0$ und ungestörte Zustände $|\varphi_n\rangle$ sind wie gehabt, vgl. § 6.2 ; die Frage lautet jetzt:

  → mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht $\hat{H}_1(t)$ einen Übergang vom Zustand $|\varphi_i\rangle$ in den Zustand $|\varphi_f\rangle$?

  → Antwort: die W.-Amplitude dafür lautet $\left(\left(\text{und W.} = |c_{fi}|^2\right)\right)$

$$c_{fi} = \langle \varphi_f(t{=}T) | \varphi_i(t{=}-T) \rangle$$

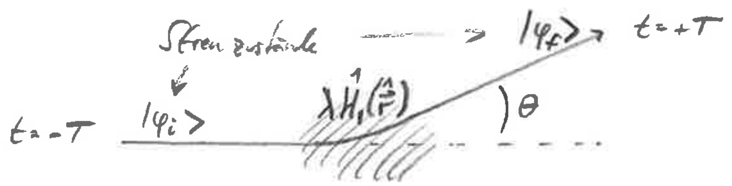
$$= \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{-T}^{T} dt \, \langle \varphi_f | \lambda \hat{H}_1(t) | \varphi_i \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} + O(\lambda^2)$$

  → wichtig z.B. für Strahlungsübergänge im Atom : induzierte Emission / Absorption

- Streutheorie

  Streuexperimente → Information über Aufbau der Materie; Kristallstrukturen; Teilchenwechselwirkungen; Kernkräfte; Ww.-Potentiale; usw.

  ((haben bisher meist gebundene / diskrete Zustände behandelt; hier Streuzust.))



Coulombpotential → Rutherford

$$|c_{fi}|^2 \to \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{Ze^2}{16\pi\varepsilon_0 E \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right]^2$$

"Streuquerschnitt"

- Teilchen in elektromagnetischen Feldern

  E-Dynamik : $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

  $\phi \equiv$ Skalarpotential , $\vec{A} \equiv$ Vektorpotential

  QM ⇒ $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{\vec{p}} - e\vec{A}(\hat{\vec{r}},t) \right]^2 + e\phi(\hat{\vec{r}},t)$

  neue Effekte; Potentialterm, wie gewohnt

Verallgemeinerungen der nichtrel. QM

Form der Schrödinger-Glg $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat H|\psi\rangle$ bleibt bestehen, aber $\hat H$ kann anders aussehen.

- ein relativistisches Teilchen [→ QM II]

  ((vgl. § 6.5, H-Feinstruktur))

  eine relativistische Glg muss Lorentz-kovariant sein!

  die lhs der SG ist linear in ∂_t ⇒ die rhs muss linear in $\vec\nabla$ bzw. $\hat{\vec p}$ sein!

  Dirac ⇒ $\hat H$ muss eine Matrix sein!

  $$\hat H = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat p_i + \beta m \quad , \quad \alpha_i, \beta \text{ Matrizen}$$

  → d.h. in der nichtrel. Theorie gibt es die Möglichkeit für Spin; in der relativistischen Theorie ist Spin eine Notwendigkeit

- sehr viele (bzw. unbestimmte Anzahl von) Teilchen

  → Statistische Physik: oft sehr viele Teilchen ($N \sim 10^{23}$); in manchen Ensembles ist T.-Zahl keine gute Variable, sondern stattdessen das chemische Potential μ. [→ Theorie III: 5. Sem.]

  → für relativistische Systeme: kann T.-Zahl nicht fixieren, z.B.: 

  "virtuelles Teilchen/Antiteilchen-Paar"

  [→ Elementarteilchenphysik: 5. Sem.]

  solche Systeme werden mit Quantenfeldtheorie [→ QFT: ≥6. Sem.] beschrieben:

  $$\hat H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\hat{\vec p}_i^{\,2} + \dots \;\to\; \int d^3\vec r \left\{ \frac{1}{2m}\left[\partial_i \hat\phi(\vec r,t)\right]^2 + \dots \right\}$$

Pfadintegralformalismus [→ QM II; QFT] [s. Münster, § 24]

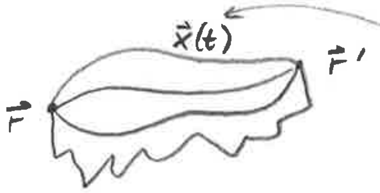
es gibt (genau wie in der klass. Mechanik) auch in QM verschiedene Formulierungen:

klassisch		quantenmechanisch
Hamilton: $H(p,x)$, $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$	⇔	kanonisch: $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat H|\psi\rangle$
Lagrange: $L(\dot x, x)$, $L = \frac{1}{2}m\dot x^2 - V(x)$	⇔	Pfadintegrale: Feynman 1948

zentrale Formel:

$$\langle \vec{r}\,'|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}\,|\vec{r}\rangle = \int_{\vec{x}(t)=\vec{r}}^{\vec{x}(t')=\vec{r}\,'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\; e^{\boxed{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} dt''\, L(\dot{x},x)}}$$ = "Wirkung"

"Pfad"



alles ist "klassisch", d.h. keine Operatoren, aber man muss über alle möglichen Bahnen summieren.

→ Pfadintegrale sind formell eine Umformulierung der QM; sehr elegant + intuitiv; erlaubt Lösung einiger Probleme, die mit kanonischen Methoden extrem schwierig sind.

Anwendungsbereiche

- Atom- und Molekülphysik

  typische Massen: $m_e = 511\ \mathrm{keV}/c^2$

  typische Energien: $E \lesssim \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \approx 13{,}6\ \mathrm{eV}$

  typische Abstände: $a_0 \gtrsim \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

- Kernphysik

  typische Massen: $m_p = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$

  (hier gibt es jedoch keine kleine Feinstrukturkonstante wie α)

  typische Energien $\sim (m_n - m_p)c^2 \approx 1{,}3\ \mathrm{MeV}$

  typische Abstände $\gg$ Proton-Radius $\sim \frac{\hbar c}{m_p c^2} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$

- Elementarteilchenphysik

  typische Energien $\gtrsim m_p c^2 \sim 1\ \mathrm{GeV}$

  typische Abstände $\ll$ Proton-Radius

- etc ...