4.5 Addition von Drehimpulsen

bei vielen Systemen kommen mehrere unabhängige Drehimpulse vor (s. Bsp 2 auf S. 54, oder Übg Aufgabe 32), z.B.:

- Bahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}$ und Spin $\hat{\vec{S}}$ → $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$
- zwei Teilchen mit jeweils $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)}$ → $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$

benutze hier die J+J-Notation

→ zwei Möglichkeiten für Wahl von vertauschenden Operatoren:

(1) $\hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{J}_3^{(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}, \hat{J}_3^{(2)}$ (denn: $[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_l^{(2)}] = 0$)

EZ: $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

direktes Tensorprodukt der Vektorräume (jeder $2j_i+1$-dim.)

(2) $\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_3, \hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}$ (denn: $[\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(1)}] = 0 = [\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(2)}]$)

((aber: $[\hat{J}_3^{(1)}, \hat{\vec{J}}^2] \neq 0$, $[\hat{J}_3^{(2)}, \hat{\vec{J}}^2] \neq 0$

⇒ $\hat{J}_3^{(1)}$ und $\hat{J}_3^{(2)}$ können nicht benutzt werden))

denn $= [\hat{J}_3^{(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(1)} + \hat{\vec{J}}^{2(2)} + 2\hat{J}_k^{(1)}\hat{J}_k^{(2)}]$
$= 2[\hat{J}_3^{(1)}, \hat{J}_k^{(1)}]\hat{J}_k^{(2)} \neq 0$

EZ: $|j_1 j_2 J M\rangle$, mit $\hat{\vec{J}}^2 |j_1 j_2 J M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |j_1 j_2 J M\rangle$
$\hat{J}_3 |j_1 j_2 J M\rangle = \hbar M |j_1 j_2 J M\rangle$

→ können einen Basiswechsel zwischen diesen beiden Möglichkeiten durchführen:

$$|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle}_{\equiv \text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten}}$$

→ wir müssen also diese Übergangsamplituden (CG-Koeff's) bestimmen.

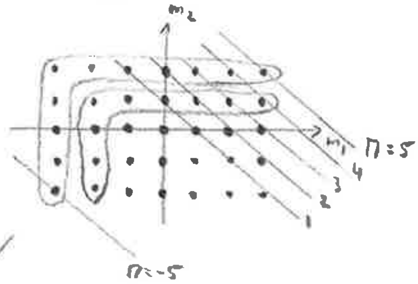
j_1, j_2 gegeben → mögliche Werte von J, M?

- in der Basis $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ gibt es $(2j_1+1)(2j_2+1)$ Zustände, also auch soviele in der Basis $|j_1 j_2 J M\rangle$.

- $\hat{J}_3 = \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \underline{M = m_1 + m_2}$

- $-j_1 \le m_1 \le j_1$ und $-j_2 \le m_2 \le j_2$

z.B. $j_1=3,\ j_2=2$:



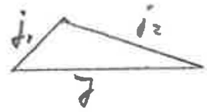
$\Leftrightarrow \ -j_1 \le M - m_2 \le j_1$ und $-j_2 \le M - m_1 \le j_2$

$M \leftrightarrow J$, $m_{1/2} \to j_{1/2}$

$\Rightarrow \ -j_1 \le J - j_2 \le j_1$ und $-j_2 \le J - j_1 \le j_2$

$\Leftrightarrow \ j_2 - j_1 \le J \le j_1 + j_2$ und $j_1 - j_2 \le J \le j_1 + j_2$

$\Rightarrow \ |j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$, oder graphisch:



- die Quantenzahlen m_i wachsen in Einheiten von 1 $\left(m_i \in \{-j_i, -j_i+1, \ldots, j_i\} \right)$

  $\Rightarrow$ die Qu.zahl $M = m_1 + m_2$ wächst in Einheiten von 1

  $\Rightarrow$ alle J müssen entweder ganz- oder halbzahlig sein

  $$\underline{J \in \{ |j_1 - j_2|, |j_1-j_2|+1, \ldots, j_1+j_2-1, j_1+j_2 \}}$$

- Test: Gesamtzahl der Zustände (sei o.B.d.A. $j_1 \ge j_2$)

$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) = \sum_{J=1}^{j_1+j_2} (2J+1) - \sum_{J=1}^{j_1-j_2-1} (2J+1)$$

benutze: $\sum_{i=1}^{n} = n$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1) + (j_1+j_2) - (j_1-j_2-1)(j_1-j_2) - (j_1-j_2-1)$$

$$= \ldots = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

Annahme: J ganzzahlig. Ergebnis gilt auch für halbzahlige J → Übg?!
$= \sum_{J=j_1-j_2+\frac{1}{2}}^{j_1+j_2+\frac{1}{2}} (2(J-\frac{1}{2})+1) = \ldots$

$\Rightarrow$ die verschiedenen J-Werte sind also <u>nicht „entartet"</u>
d.h. müssen nur einmal gezählt werden.

Bestimmung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

können wieder die Leiteroperatoren sowie die allg. Ergebnisse von S. 48 benutzen:

$$\left. \begin{aligned} &\hat{J}_\pm |j, m\rangle = C_\pm(j,m) \, |j, m \pm 1\rangle \\ &\text{mit} \quad C_\pm(j,m) = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Strategie:

(a) betrachte "Maximalen" Zustand $|j_1 j_2 J J\rangle$;

wegen $m_1+m_2=M$ ist $|j_1 j_2 J J\rangle = \sum_n a_n \,|j_1 j_2 \overbrace{(j_1-n)}^{m_1}\overbrace{(J-j_1+n)}^{m_2}\rangle$

wobei $n \in \{0,1,\dots\}$ alle Werte mit $\left\{ \begin{array}{l} -j_1 \le j_1-n \le j_1 \\ -j_2 \le J-j_1+n \le j_2 \end{array} \right\}$ annimmt

(b) operiere mit $\hat{J}_+ = \hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}$ auf diese Glg.

lhs $=0$, auf der rhs (*) benutzen;

→ erhalte lineare Gleichungen für die a_n

(c) Normierungsbedingung $\sum_n |a_n|^2 \stackrel{!}{=} 1$

(d) wähle eine Phasenkonvention; z.B. Condon-Shortley: $a_0 \in \mathbb{R}^+$

(e) $|j_1 j_2 J (J-1)\rangle$ durch Operation mit $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}$ usw.

Bsp: $j_1 = 2$, $j_2 = 3$, $J = 3 \in \{\overset{|j_1-j_2|}{1}, 2, 3, 4, \overset{j_1+j_2}{5}\}$

(a) $|23\underbrace{33}_{JM}\rangle = a_0 |23\underbrace{21}_{m_1 m_2}\rangle + a_1 |2312\rangle + a_2 |2303\rangle$

(b) $0 = a_0 \hat{J}_+^{(2)} |2321\rangle + a_1 (\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}) |2312\rangle + a_2 \hat{J}_+^{(1)} |2303\rangle$

$\stackrel{(*)}{=} \hbar \left\{ a_0 \sqrt{2\cdot 5}\, |2322\rangle + a_1 \sqrt{1\cdot 4}\, |2322\rangle + a_1 \sqrt{1\cdot 6}\, |2313\rangle + a_2 \sqrt{2\cdot 3}\, |2313\rangle \right\}$

⇒ $0 = \sqrt{10}\, a_0 + 2 a_1$, $0 = a_1 + a_2$

⇒ Lsg $a_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\, a_0$, $a_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a_0$

(c) $1 \stackrel{!}{=} |a_0|^2 \left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)$ ⇒ $|a_0| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

(d) $a_0 = +\frac{1}{\sqrt{6}}$, $a_1 = -\sqrt{\frac{5}{12}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{5}{12}}$

(e) $C_-(3,3)\, |23\underbrace{32}_{JM}\rangle = a_0 \left\{ C_-(2,2) |2311\rangle + C_-(3,1) |2320\rangle \right\}$

$\hat{J}_-$ auf Glg (a)

$+ a_1 \left\{ C_-(2,1) |2302\rangle + C_-(3,2) |2311\rangle \right\}$

$+ a_2 \left\{ C_-(2,0) |23{-1}3\rangle + C_-(3,3) |2302\rangle \right\}$

$= \dots$

→ man findet die Clebsch-Gordan-Koeff's in Tabellen (s. z.B. Homepage)

manchmal werden sie auch als "3j-Symbole" ausgedrückt: $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2-M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J\, {-M} \rangle$

→ für Mathematica-Fans: ClebschGordan[{j1, m1}, {j2, m2}, {J, M}]

→ Anwendungen: Übungen