((Erinnerung: Zeitentwicklungsoperator "Parameter" "Generator"

$$\hat U(t,t_0) = \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat H\right) \approx \mathbb{1} - \tfrac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat H + O\left((t-t_0)^2\right)$$))

analog: $$\hat U(R) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\alpha\, \vec n\cdot \vec r\times\vec\nabla_{\vec r} + O(\alpha^2)$$
$$= \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\sum_j \underbrace{\alpha n_j}_{\text{"Param."}} \underbrace{\left[\vec r\times(-i\hbar\vec\nabla_{\vec r})\right]_j}_{\text{"Generatoren"}} + O(\alpha^2)$$

Fazit
⇒ Drehungen werden vom Bahndrehimpulsoperator $\hat{\vec L} = \hat{\vec r}\times\hat{\vec p}$ generiert. Die Komponenten $\hat L_i$ genügen der SO(3) Lie-Algebra

$$[\hat L_j,\hat L_k] = \sum_{m=1}^{3} i\hbar\,\varepsilon_{jkm}\hat L_m \qquad \text{(vgl. Aufgabe 27a)}$$

Eine große Drehung: $\hat U(R) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\,\vec n\cdot\hat{\vec L}\right)$

4.2 Drehimpuls-Eigenwerte

Lie-Algebra für Bahndrehimpuls $\hat{\vec L} = \hat{\vec r}\times\hat{\vec p}$: $[\hat L_j,\hat L_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkm}\hat L_m$

Einstein-Konvention: Summation über doppelte Indizes

→ das ist dieselbe Algebra wie für die Matrixgeneratoren der SO(3), vgl. S.45: $[\Sigma_j,\Sigma_k] = i\varepsilon_{jkm}\Sigma_m \Leftrightarrow [\hbar\Sigma_j,\hbar\Sigma_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkm}\hbar\Sigma_m$.

Deshalb nennt man diese Algebra i.A. die Drehimpulsalgebra.

wir nennen deren Generatoren nun $\hat J_i$: $[\hat J_i,\hat J_k] = i\hbar\,\varepsilon_{ikl}\hat J_l$

EW und EZ der $\hat J_i$?

können (analog zur Lsg des harm. Osz.) rein algebraisch bestimmt werden!

Bem.:
- Kugelsymmetrie ⇔ $[\hat H,\hat J_i]=0$
  ⇒ $\hat J_i$-Eigenzustände sind auch $\hat H$-EZ. (vgl. Satz auf S.32)
- $[\hat J_1,\hat J_2] = i\hbar\hat J_3$, $[\hat J_2,\hat J_3] = i\hbar\hat J_1$, $[\hat J_3,\hat J_1] = i\hbar\hat J_2$
  ⇒ es gibt keine gleichzeitigen EZ der $\hat J_i$.
  wir wählen unten diejenigen von $\hat J_3$.
- $[\hat{\vec J}^2,\hat J_i] = 0 = [\hat{\vec J}^2,\hat H]$ (siehe Übung, Aufgabe 27a)
  ⇒ $\hat{\vec J}^2$ hat gleichzeitige EZ mit $\hat J_3$ (und $\hat H$).

Notation für EZ:

$$\hat{\vec{J}}^2|\lambda,m\rangle = \hbar^2\lambda\,|\lambda,m\rangle$$
$$\hat{J}_3|\lambda,m\rangle = \hbar m\,|\lambda,m\rangle$$
$$\langle\lambda,m|\lambda',m'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{mm'}$$

es gilt: $$\lambda\hbar^2 = \langle\lambda,m|\hat{\vec{J}}^2|\lambda,m\rangle = \sum_{i=1}^{3}\langle\lambda,m|\hat{J}_i\hat{J}_i|\lambda,m\rangle$$
$$\overset{(\hat{J}_i \text{ hermitesch})}{=} \sum_{i=1}^{3}\|\hat{J}_i|\lambda,m\rangle\|^2 \geq 0$$

def $\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$, $\hat{J}_- \equiv \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$ $\Rightarrow$ $\hat{J}_+^{\dagger} = \hat{J}_-$

Vertauschungsrelationen der $\hat{J}_\pm$:

(1) $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_+] = 0 = [\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_-]$

(2) $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}_3, \hat{J}_1] \pm i[\hat{J}_3, \hat{J}_2] = i\hbar\hat{J}_2 \pm \hbar\hat{J}_1 = \pm\hbar\hat{J}_\pm$

(3) $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = i[\hat{J}_2, \hat{J}_1] - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = 2\hbar\hat{J}_3$

außerdem: (4) $$\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = (\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) + \hat{J}_3^2 + i[\hat{J}_1, \hat{J}_2]$$
$$= \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_3^2 - \hbar\hat{J}_3 \overset{(3)}{=} \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_3^2 + \hbar\hat{J}_3$$

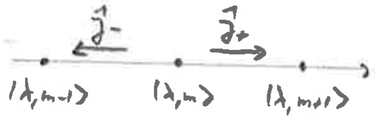
daraus folgt:

- $\hat{\vec{J}}^2(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle) \overset{(1)}{=} \hbar^2\lambda\,(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle)$

  $\Rightarrow$ $\hat{\vec{J}}^2$-EW wird von $\hat{J}_\pm$ nicht verändert

- $\hat{J}_3(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle) = \{\hat{J}_\pm\hat{J}_3 + [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm]\}|\lambda,m\rangle \overset{(2)}{=} \hbar(m\pm1)(\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle)$

  $\Rightarrow$ $\hat{J}_\pm$ sind Auf/Absteigeop's:



- $0 \leq \|\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle\|^2 = \langle\lambda,m|\hat{J}_\mp\hat{J}_\pm|\lambda,m\rangle$
  $$\overset{(4)}{=} \langle\lambda,m|\hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_3^2 \mp \hbar\hat{J}_3|\lambda,m\rangle = \hbar^2(\lambda - m^2 \mp m)$$

  $\Rightarrow$ $m^2 \pm m \leq \lambda$

$\rightarrow$ für gegebenes λ muss es also ein $m_{max} \equiv j$ geben, so dass $\hat{J}_+|\lambda,j\rangle = 0$

$\Rightarrow$ $\|\hat{J}_+|\lambda,j\rangle\| = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\lambda = j^2 + j = j(j+1)}$

$\rightarrow$ wegen Sy. $m \to -m$ ist $m_{min} = -j$, so dass $\hat{J}_-|\lambda,-j\rangle = 0$

$\Rightarrow$ die möglichen m-Werte sind also $-j, -j+1, \dots, j-1, j$

es gibt $2j+1$ solche Werte $\Rightarrow 2j+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}}$

schreibe nun statt $|\lambda, m\rangle = |j(j+1), m\rangle$ einfach nur $|j, m\rangle$

Zusammenfassung:

$$\hat{J}^2 |j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m\rangle$$

$$\hat{J}_3 |j,m\rangle = \hbar m\,|j,m\rangle$$

$$j \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots\}$$ "Drehimpuls ist quantisiert"

$$m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$$ $2j+1$ Stück

Normierung der EZ

$$\hat{J}_+ |j,m\rangle = C_+(j,m)\,|j,m+1\rangle \quad \overset{(\ )^\dagger}{\Rightarrow} \quad \langle j,m|\hat{J}_- = C_+^*(j,m)\,\langle j,m+1|$$

$$\Rightarrow \langle j,m|\underbrace{\hat{J}_-\hat{J}_+}_{\overset{(4)}{=} \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 - \hbar\hat{J}_3 = \hbar^2(j(j+1)-m^2-m)}|j,m\rangle = |C_+(j,m)|^2 \underbrace{\langle j,m+1|j,m+1\rangle}_{=1}$$

$$\Rightarrow |C_+(j,m)|^2 = \hbar^2 (j-m)(j+m+1)$$

wähle z.B. die Condon-Shortley-Phasenkonvention $C_+(j,m) = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$

genauso: $\hat{J}_- |j,m\rangle = C_-(j,m)\,|j,m-1\rangle \Rightarrow C_-(j,m) = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$

damit können wir nun alle Matrixelemente berechnen:

$$\langle j'm'|\hat{J}_3|j,m\rangle = \hbar m\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

$$\langle j'm'|\hat{J}_1|j,m\rangle = \frac{1}{2}\langle j'm'|\hat{J}_+ + \hat{J}_-|j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(C_+(j,m)\,\delta_{jj'}\delta_{(m+1)m'} + C_-(j,m)\,\delta_{jj'}\delta_{(m-1)m'}\right)$$

$$\langle j'm'|\hat{J}_2|j,m\rangle = \frac{i}{2}\langle j'm'|\hat{J}_- - \hat{J}_+|j,m\rangle = \frac{i\hbar}{2}\left(C_-(j,m)\,\delta_{jj'}\delta_{(m-1)m'} - C_+(j,m)\,\delta_{jj'}\delta_{(m+1)m'}\right)$$