Wellenfkt. in Ortsdarstellung

- $\psi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle$

- Grundzustand: $\quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \Big| \langle x|$ beide Seiten v. li. mult.

  $\mathbb{1} = \int dx' |x'\rangle\langle x'|$ einfügen

$$\rightarrow \int dx' \underbrace{\langle x|\hat{a}|x'\rangle}\underbrace{\langle x'|0\rangle}_{=\psi_0(x')} = 0$$

$$\langle x|\hat{a}|x'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\underbrace{\langle x|\hat{x}|x'\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\underbrace{\langle x|\hat{p}|x'\rangle}$$

$\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x'\langle x|x'\rangle = x\,\delta(x-x')$ wg. Normierung, s. S. 30

$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar\partial_x\delta(x-x')$, s. S. 31 (neuer Form. → Schrödinger-Gl. (x))

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x\,\psi_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\psi_0'(x) = 0 \qquad (\text{im } \partial_x\delta\text{-Integral PI})$$

Lsg: $\quad \psi_0(x) = C\cdot\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$

Norm: $\quad \frac{1}{|C|^2} = \int dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad \Rightarrow \quad |C| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

- die restlichen Zustände folgen aus dem Grundzustand:

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle \hat{a}^n x|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\partial_x\right)^n \psi_0(x)$$

$p = -i\hbar\partial_x$

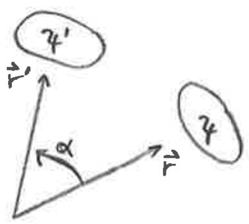
4. Symmetrien in der QM: Kugelsymmetrie, Drehimpuls

bisher: nur 1D-Systeme betrachtet.

Physik: 3D!

falls es nur Zentralkräfte gibt, ist das System kugelsymmetrisch.

→ weitreichende Konsequenzen!



ursprünglich gilt $\quad i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

nach Drehung bzw. Rotation R des Systems: $|\psi'\rangle = \hat{U}(R)|\psi\rangle$

wegen $\langle\psi'|\psi'\rangle = 1 = \langle\psi|\psi\rangle$ muss $\hat{U}(R)$ unitär sein: $\hat{U}^\dagger U = \mathbb{1}$

das System ist symmetrisch, falls $|\psi'\rangle$ und $|\psi\rangle$ dieselbe Glg. erfüllen: $i\hbar\partial_t|\psi'\rangle \overset{?}{=} \hat{H}|\psi'\rangle$

$$\Rightarrow i\hbar\partial_t|\psi\rangle \overset{?}{=} \hat{U}^{-1}(R)\,\hat{H}\,\hat{U}(R)|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{H} \overset{?}{=} \hat{U}^{-1}(R)\,\hat{H}\,\hat{U}(R)$$

für "kleine" Drehungen $\hat{U}(R) \approx \hat{1} + i\hat{G}\varepsilon$ ← Generator, ← $|\varepsilon| \ll 1$

ist $\hat{U}^{-1}(R) \approx \hat{1} - i\hat{G}\varepsilon$

und $\hat{U}^{+}(R) \approx \hat{1} - i\hat{G}^{+}\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\hat{G}$ hermitesch $(\hat{G}^{+}=\hat{G})$, damit $\hat{U}^{+}\hat{U} = 1$

$$\rightarrow \hat{H} \overset{?}{=} \hat{U}^{-1}(R)\hat{H}\hat{U}(R) \approx \hat{H} - i[\hat{G},\hat{H}]\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{[\hat{G},\hat{H}] \overset{?}{=} 0}$$

falls ja $\Rightarrow$ $\hat{G}$ und $\hat{H}$ haben gleichzeitige Eigenzustände (vgl. Satz auf S. 32)

→ es ist also wichtig, $\hat{G}$ und seine EZ zu bestimmen.

4.1 Gruppen und Generatoren

allg. Sprache zur Beschreibung von Symmetrien: Gruppentheorie

def Gruppe $G \equiv$ Menge von Elementen $g_1, g_2, \ldots$ mit einer Verknüpfung "$\cdot$", so dass gilt:

(i) $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in G$

(ii) $g_1\cdot(g_2\cdot g_3) = (g_1\cdot g_2)\cdot g_3$ (Assoziativität)

(iii) $e\cdot g = g\cdot e = g$ ($\exists$ Einselement)

(iv) $g^{-1}\cdot g = g\cdot g^{-1} = e$ ($\exists$ Inverses Element)

eine allg. Drehung kann durch Achse $\vec{n}$ $(|\vec{n}|=1)$ und Winkel α $\begin{pmatrix} c \equiv \cos(\alpha) \\ s \equiv \sin(\alpha)\end{pmatrix}$ parametrisiert werden: $\vec{r}\,' = R(\vec{n},\alpha)\vec{r} = c\,\vec{r} + (1-c)(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} + s\,\vec{n}\times\vec{r}$

(s. Übung, Aufgabe 26)

→ Drehungen bilden eine Gruppe, denn:

(i) $R(\vec{n}_2,\alpha_2)R(\vec{n}_1,\alpha_1)$ ist auch Drehung

(ii) "trivial"

(iii) $e \equiv R(\vec{n},0)$

(iv) $R^{-1}(\vec{n},\alpha) = R(\vec{n},-\alpha)$

Bem: • die $R(\vec{n},\alpha)$ können als 3×3 - Matrizen dargestellt werden

• wegen $|R\vec{r}|^2 = |\vec{r}|^2$ sind die R orthogonal: $R^T R = \mathbb{1}$

• es gilt $\det R = 1$ (als Übung)

• diese Gruppe heisst $SO(3)$ ← speziell, wegen $\det R = 1$; orthogonal, wegen $R^T R = \mathbb{1}$

für infinitesimal kleine Drehungen, $|\alpha| \ll 1$, gilt:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \alpha\, \vec{n}\times\vec{r} + O(\alpha^2)$$

bzw $r_i' = r_i + \alpha \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, n_j r_k + O(\alpha^2)$ ← Levi-Civita-Tensor

$$= \sum_k \Big\{ \delta_{ik} - i\alpha \sum_j n_j \underbrace{i\varepsilon_{ijk}}_{\overset{\text{def.}}{\equiv} (\Sigma_j)_{ik}} \Big\} r_k + O(\alpha^2)$$

also $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bem: • $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sind hermitesch: $\Sigma_j^\dagger = \Sigma_j$

• die Σ_j genügen der "Lie-Algebra" der $SO(3)$ (s. Übg, Aufg. 28a)

$$[\Sigma_1, \Sigma_2] = i\Sigma_3 \;,\quad [\Sigma_2, \Sigma_3] = i\Sigma_1 \;,\quad [\Sigma_3, \Sigma_1] = i\Sigma_2$$

bzw. $[\Sigma_j, \Sigma_k] = i \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{jkm} \Sigma_m$

• die Drehmatrix ist

$$R(\vec{n},\alpha) = \mathbb{1} - i\alpha \sum_j n_j \Sigma_j + O(\alpha^2) = \mathbb{1} - i\alpha\, \vec{n}\cdot\vec{\Sigma} + O(\alpha^2)$$

• man kann sogar zeigen (s. Übg, Aufgabe 28b), dass $R(\vec{n},\alpha) = \exp(-i\alpha\, \vec{n}\cdot\vec{\Sigma})$ gilt, d.h. die Generatoren Σ_j generieren nicht nur die "kleinen", sondern auch die "großen" Drehungen. (dies gilt für viele Gruppen; nicht nur für die $SO(3)$)

wie transformiert sich nun der Zustand $|\psi\rangle$ bzw Wellenfkt $\psi(\vec{r})$?

Annahme: $\psi(\vec{r}) \in \mathbb{C}$ (also "skalare" Fkt., wie bisher)

$$\Rightarrow \psi'(\vec{r}\,') \overset{!}{=} \psi(\vec{r})$$

$$= \psi(R(\vec{n},-\alpha)\vec{r}\,') = \psi(\vec{r}\,' - \alpha\, \vec{n}\times\vec{r}\,') + O(\alpha^2)$$

$$= \psi(\vec{r}\,') - \alpha(\vec{n}\times\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\, \psi(\vec{r}\,') + O(\alpha^2)$$

$$\equiv \hat{U}(R)\, \psi(\vec{r}\,')$$