vielleicht kann man den Messprozess sogar in zwei Schritte unterteilen:

	vor der Messung	nach der Messung aber ohne Ablesen	Ablesung
Zustand	$\lvert\psi\rangle = \sum_n c_n \lvert\psi_n\rangle$		$\lvert\psi_n\rangle$
statistischer Operator	$\hat{\varrho}(\psi) = \lvert\psi\rangle\langle\psi\rvert = \sum_n \lvert c_n\rvert^2 \lvert\psi_n\rangle\langle\psi_n\rvert + \sum_{n,m} c_m^* c_n \lvert\psi_n\rangle\langle\psi_m\rvert$	$\hat{\varrho} = \sum_n \lvert c_n\rvert^2 \lvert\psi_n\rangle\langle\psi_n\rvert$	$\hat{\varrho} = \lvert\psi_n\rangle\langle\psi_n\rvert$
Art des Zustandes	rein	gemischt "Schröd.-Katze"	rein
Prozess	Zustandsreduktion →	Kenntnisnahme →	
	Postulat IV →		

→ der erste Schritt ist "nichts anderes" als Dekohärenz durch Mittelung über Phasenfaktoren (vgl. S. 38)

→ der zweite Schritt ist wie in der klassischen Statistik, d.h. ohne Phasenfaktoren

⇒ der Prozess insgesamt bleibt nicht-deterministisch!

((vgl. Ü 20a2: rein → gemischt kann nicht durch Schröd.-Glg beschrieben werden!))

EPR-Paradoxon (Einstein-Podolski-Rosen, 1935)

Unzufriedenheit mit Messprozess → Auffassung dass QM zwar nicht falsch, aber "unvollständig" ist; QM als Näherung einer "besseren" Theorie.

EPR fordern: Lokalität: falls $|\vec{x}_A - \vec{x}_B| > c\,|t_A - t_B|$, hängen die Messergebnisse am System A nur von den Parametern des Systems A ab, und die am System B nur von B-Param.

Realität: kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen, ohne ein System zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser Größe entspricht.

→ aus den EPR-Hypothesen folgt z.B. für den Zerfall eines ruhenden Teilchens:

- messe Impuls an System A → $\vec{p}_A$
  - ⇒ kennen $\vec{p}_B$ ohne Messung, wegen $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{0}$!
- Ortsmessung an System B → $\vec{x}_B$
  - ⇒ kennen $\vec{x}_B, \vec{p}_B$ <u>gleichzeitig</u> !

→ QM enthält diese Information nicht, wegen $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, und sei damit laut EPR unvollständig.

<u>Bell'sche Ungleichungen</u> (J.S. Bell, 1964)

Bell findet Beispiele, bei denen die EPR-Hypothesen nicht nur eine "bessere" Beschreibung der Natur vorschlagen, sondern sogar zu anderen Vorhersagen als die QM führen!

((Diese Beispiele sind als Bell'sche Ungleichungen bekannt.)) (brauchen "Spin" zum Verständnis → bis Kap. 4 warten...)

→ jetzt kann die Frage also <u>experimentell</u> beantwortet werden.

Resultat:
- QM ist mit dem Experiment verträglich [A. Aspect, 1981; ...]
- keine lokale realistische Theorie ist mit dem Expt. vertr.

→ wir müssen also – bis zu dem Zeitpunkt, an dem etwas Besseres vorhanden ist – das Postulat V akzeptieren.

((↳ (1) "nichtlokale verborgene Variablen" [Kausalität ?]

(2) "kein freier Wille": Experimente bei A, B können nicht unabh. gewählt werden;

(3) akzeptiere den nichtlokalen "Kollaps der Wellenfunktion", V; "Kopenhagener Deutung"

(4) "Viele-Welten-Interpretation": das Universum teilt sich bei jeder Messung – <u>alle</u> Möglichkeiten realisiert – Multiversum (Everett)

(5) benutze "Pfadintegrale"; nur Korrelationen sind relevant, keine realist. Interpretation

(6) QM ist nur eine Näherung einer unbekannten fundamentalen Theorie))

⋮

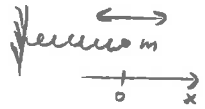
⇝ siehe auch Artikel von <u>Mermin</u> + <u>GHSZ</u> auf homepage

3.6 Harmonischer Oszillator

als Bsp. des allg. Formalismus (→ s. auch Ü23)

- eines der wenigen Systeme der QM, die wir exakt lösen können
- hat sehr viele Anwendungen – sogar in der relativistischen Quantenfeldtheorie

klassisch :



lineare Physik, $F=-\kappa x$, Notation $\kappa \equiv m\omega^2$

quadratisches System, $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

Newton-Lsg : $x(t)=x(0)\cos(\omega t)+\frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t)$

QM: $\hat H=\frac{\hat p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat x^2$, $[\hat x,\hat p]=i\hbar$

def. $\hat a\equiv\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat x+\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat p$

$\hat a^+\equiv$ ″ $-$ ″

im Gegensatz zu $\hat x,\hat p$ sind $\hat a,\hat a^+$ nicht hermitesch ⇒ keine Observablen

⇔ $\hat x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat a+\hat a^+)$, $\hat p=\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\frac{\hat a-\hat a^+}{i}$

es folgt:
- $[\hat a,\hat a]=[\hat a^+,\hat a^+]=0$
- $[\hat a,\hat a^+]=\frac{-i}{2\hbar}[\hat x,\hat p]+\frac{i}{2\hbar}[\hat p,\hat x]=1$
- $\hat H=-\frac{\hbar\omega}{4}(\hat a-\hat a^+)(\hat a-\hat a^+)+\frac{\hbar\omega}{4}(\hat a+\hat a^+)(\hat a+\hat a^+)$

$$=\frac{\hbar\omega}{4}\big(\cancel{-\hat a\hat a}+\hat a\hat a^++\hat a^+\hat a\cancel{-\hat a^+\hat a^+}\;\cancel{+\hat a\hat a}+\hat a\hat a^++\hat a^+\hat a\cancel{+\hat a^+\hat a^+}\big)$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}\big(\underbrace{\hat a\hat a^+}_{=1+\hat a^+\hat a}+\hat a^+\hat a\big)=\hbar\omega\left(\hat a^+\hat a+\frac{1}{2}\right)$$

def $\hat N\equiv\hat a^+\hat a$

es folgt:
- $\hat H=\hbar\omega(\hat N+\frac{1}{2})$

  Eigenzustände von $\hat N$ sind also auch EZ von $\hat H$
- $[\hat N,\hat a]=[\hat a^+\hat a,\hat a]=\hat a^+\overset{0}{\cancel{[\hat a,\hat a]}}+[\hat a^+,\hat a]\hat a=-\hat a$

  ((benutze $[\hat A\hat B,\hat C]=\hat A[\hat B,\hat C]+[\hat A,\hat C]\hat B$))
- $[\hat N,\hat a^+]=\hat a^+[\hat a,\hat a^+]+\overset{0}{\cancel{[\hat a^+,\hat a^+]}}\hat a=\hat a^+$

seien nun $|\lambda\rangle$ die EZ von $\hat N$ (und $\hat H$) : $\underline{\hat N|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle}$

dann gilt:
- $\lambda = \langle\lambda|\lambda|\lambda\rangle = \langle\lambda|\hat a^\dagger \hat a|\lambda\rangle = \|\hat a|\lambda\rangle\|^2 \geq 0$
- $\hat N \hat a|\lambda\rangle = (\hat a\hat N + [\hat N,\hat a])|\lambda\rangle = (\lambda-1)\hat a|\lambda\rangle$

  $\rightarrow$ $\hat a|\lambda\rangle$ ist auch ein EZ von $\hat N$ (und $\hat H$), aber mit EW $\lambda-1$

  $\rightarrow$ man nennt $\hat a$ "<u>Vernichtungs-</u>" oder "<u>Absteigeoperator</u>"
- $\hat N \hat a^\dagger|\lambda\rangle = (\hat a^\dagger \hat N + [\hat N,\hat a^\dagger])|\lambda\rangle = (\lambda+1)\hat a^\dagger|\lambda\rangle$

  $\rightarrow$ $\hat a^\dagger|\lambda\rangle$ ist auch ein EZ von $\hat N$ (und $\hat H$), aber mit EW $\lambda+1$

  $\rightarrow$ man nennt $\hat a^\dagger$ "<u>Erzeugungs-</u>" oder "<u>Aufsteigeoperator</u>"

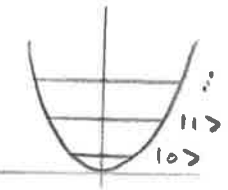
$\rightarrow$ also hat $\hat a|\lambda\rangle$ den EW $\lambda-1$; ... ; $\hat a^n|\lambda\rangle$ den EW $\lambda-n$

aber alle $\lambda \geq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda \in \{0,1,2,\dots\} \text{ und } \hat a|0\rangle = 0}$

haben also mit Notation $\lambda \to n$:
$$\hat N|n\rangle = n|n\rangle$$
$$\hat H|n\rangle = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle$$

der Zustand $|0\rangle$ heisst <u>Grundzustand</u>

der entsprechende Energie-EW ist $\frac{\hbar\omega}{2}$ (Nullpunktsenergie)



die anderen Zustände sind $|n\rangle = c_n (\hat a^\dagger)^n |0\rangle$

<u>Bestimmung der Normierungskonstanten</u> c_n (($c_0 = 1$ trivial))

$$|n\rangle = c_n(\hat a^\dagger)^n|0\rangle = c_n \hat a^\dagger (\hat a^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}}\hat a^\dagger|n-1\rangle$$

$$1 = \langle n|n\rangle = \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|^2 \langle n-1|\underbrace{\hat a\hat a^\dagger}_{=\hat N + [\hat a,\hat a^\dagger] = \hat N + 1 \to n-1+1}|n-1\rangle$$

$$= \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right|^2 n$$

$\Rightarrow$ $|c_n| = |c_{n-1}|\frac{1}{\sqrt n}$ und $c_0 = 1$

$\Rightarrow$ $|c_1| = 1$, $|c_2| = \frac{1}{\sqrt 2}$, $|c_3| = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}$, ..., $|c_n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}$

falls wir die c_n reell und positiv wählen, gilt also

$$\boxed{\begin{aligned} \hat a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \text{und } \hat a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \end{aligned}}$$

((als Übg: $n|n\rangle = \hat N|n\rangle = (\hat a\hat a^\dagger - 1)|n\rangle = \dots \rightsquigarrow \hat a|n+1\rangle = \dots$))

$\rightarrow$ haben also alle Eigenschaften rein algebraisch bestimmt!
(keine Integrale, ...)