3.3 Zeitentwicklung

zeitunabhängige Schrödinger-Glg : $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ (vgl. S. 12, 31)

zeitabhängige Schrödinger-Glg : $\boxed{i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle}$ (vgl. S. 8, 12)

((im Schrödinger-Bild ; s.u.))

die Lsg nennen wir $|\psi(t)\rangle$

def Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t,t_0)$ durch $\underline{|\psi(t)\rangle \equiv \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle}$

dieser erfüllt also die Gln.
$$\left.\begin{aligned} i\hbar\partial_t \hat{U}(t,t_0) &= \hat{H}\hat{U}(t,t_0) \\ \hat{U}(t_0,t_0) &= \hat{\mathbb{1}} \end{aligned}\right\} \quad ((\text{"ER"} !))$$

und $\underline{\hat{U}^+(t,t_0)\hat{U}(t,t_0) = \hat{\mathbb{1}}}$, d.h. $\hat{U}$ ist unitär

denn: schreibe Schrödinger-Glg für konjugierten Vektor auf
$$\langle i\hbar\partial_t\psi| = -i\hbar\langle\partial_t\psi| = \langle\hat{H}\psi| = \langle\psi|\hat{H}^+ = \langle\psi|\hat{H}$$
$$\Rightarrow i\hbar\partial_t\langle\psi_1|\psi_2\rangle = -\langle\psi_1|\hat{H}|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\hat{H}|\psi_2\rangle = 0$$
also ist $\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(t_0)|\underbrace{\hat{U}^+(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)}_{\stackrel{!}{=}\hat{\mathbb{1}}}|\psi_2(t_0)\rangle$

zeitunabhängig $\Rightarrow$ ∎

den "ER" oben können wir sogar formal lösen:
$$\underline{\hat{U}(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot(t-t_0)\right\}}$$

((wobei (vgl. S. 31, und Ü 14) Funktion (Operator) $\hat{=}$ Taylorreihe))

denn: $\hat{U}(t_0,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\cdot 0} = \hat{\mathbb{1}}$ ✓
$$i\hbar\partial_t \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n (t-t_0)^n \hat{H}^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1}(t-t_0)^{n-1}\hat{H}^n$$
$$\stackrel{n=m+1}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^m (t-t_0)^m \hat{H}\hat{H}^m = \hat{H}\hat{U}(t,t_0) \underset{✓}{=} \hat{U}(t,t_0)\hat{H}$$ ∎

Können damit zwei interessante Folgerungen machen:

Zeitentwicklung in Energiebasis

schreibe Anfangszustand als $|\psi(t_0)\rangle = \sum_E |E\rangle \underbrace{\langle E|\psi(t_0)\rangle}_{\equiv c_E}$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = \sum_E c_E\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|E\rangle = \sum_E c_E\, e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}|E\rangle \quad \left(\text{vgl. S.12}\right)$$

die Wahrscheinlichkeit für den Energie-Eigenwert E' ist dann

$$P_\psi(E') = |\langle E'|\psi(t)\rangle|^2 = |c_{E'}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E'(t-t_0)}|^2 = |c_{E'}|^2$$

zeitunabhängig! ((obwohl $|\psi(t)\rangle \neq |\psi(t_0)\rangle$))

Zeitentwicklung der Erwartungswerte

$$i\hbar\partial_t\langle\hat{A}\rangle = i\hbar\partial_t\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = -\langle\psi(t)|\hat{H}\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{A}\hat{H}|\psi(t)\rangle$$
$$= \langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle \qquad \text{"Ehrenfest-Theorem"}$$

also: Erwartungswert zeitunabhängig $\Leftrightarrow$ Operator vertauscht mit Hamilton-Op.

eine solche Observable $\hat{A}$ nennt man Erhaltungsgröße : $[\hat{A},\hat{H}]=0$

Bilder: wir wollen Zeitabhängigkeit aus einem etwas anderen Winkel betrachten.

Schrödinger-Bild:

$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ — Zustände sind zeitabhängig

$(\partial_t\hat{A}) = 0$ — Operatoren zeitunabhängig

$\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ — Erwartungswerte

alternativ:

Heisenberg-Bild:

def $|\psi_H\rangle \equiv |\psi(0)\rangle = \hat{U}^+(t,0)|\psi(t)\rangle$ — Zustände$_H$ sind zeitunabhängig

def $\hat{A}_H(t) \equiv \hat{U}^+(t,0)\hat{A}\hat{U}(t,0) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ — Operatoren zeitabhängig

$$\Rightarrow \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{U}^+(t,0)\hat{A}\hat{U}(t,0)|\psi(0)\rangle = \langle\psi_H|\hat{A}_H(t)|\psi_H\rangle$$

Physik (wie z.B. Erwartungswerte) bleibt natürlich unverändert.

Die zeitabhängige Schrödinger-Glg wird aber ersetzt

durch $\underline{\underline{i\hbar\partial_t\hat{A}_H(t)}} = -\hat{H}\hat{A}_H(t) + \hat{A}_H(t)\hat{H} = \underline{\underline{[\hat{A}_H(t),\hat{H}]}}$

$i\hbar\partial_t\hat{U} = \hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$

$\rightarrow -i\hbar\partial_t\hat{U}^+ = \hat{H}^+\hat{U}^+ = \hat{H}\hat{U}^+$

→ Postulate der QM (IV) (vgl. S.29)

(IV) Die zeitliche Entwicklung von Zuständen im Schrödinger-Bild wird durch die Schrödinger-Glg. $i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ bestimmt, wobei $\hat{H}$ der Hamilton-Operator ist.

Vergleich mit klass. Physik (vgl. S.2)

klass. Bewegungsgln. können auch in verschiedenen "Bildern" dargestellt werden.

Newton: $\dot{p} = m\ddot{x} = -\partial_x V$

Hamilton: $H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$; x, p formal unabhängige "verallgemeinerte" Koord.

mit Poisson-Klammer $\{A,B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x}$ gilt:

$\{x,x\} = 0$; $\{p,p\} = 0$; $\{x,p\} = 1$ ((kanonische Normierung))

$\dot{x} = \{x,H\} = \frac{p}{m}$; $\dot{p} = \{p,H\} = -\partial_x V$ ((Dynamik))

Quantisierung: $x \to \hat{x}$, $p \to \hat{p}$, $\{A,B\} \to \frac{1}{i\hbar}[A,B]$

$\Rightarrow [\hat{x},\hat{x}] = 0$; $[\hat{p},\hat{p}] = 0$; $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ ((gleichzeitige Vertauschungsrelationen))

$i\hbar\partial_t \hat{x}(t) = [\hat{x},\hat{H}]$; $i\hbar\partial_t \hat{p}(t) = [\hat{p},\hat{H}]$ ((Dynamik im Heisenberg-Bild))

3.4 Statistischer Operator

vgl. z.B. [Münster §20], [Schwabl §20]

bisher haben wir mit "reinen" Zuständen $|\psi\rangle$ gearbeitet; für eine Observable $\hat{A}$ haben wir dann physikalische Vorhersagen:

- Erwartungswerte: $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$
  $(\Delta A)^2 = \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle$ usw.

- Wahrsch., dass Messung den bestimmten Messwert a gibt (($A|a\rangle = a|a\rangle$)):
  $P_\psi(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2 = \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle$

können diese Größen auch etwas anders aufschreiben, mit Hilfe des

statistischen Operators $\hat{\rho}(\psi) \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$