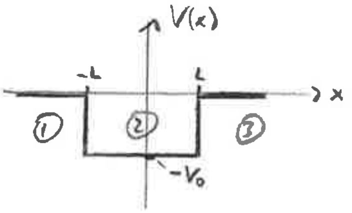
2.3 Streuung am Potentialtopf



Potential wieder wie in §2.1 (s. 17ff)

wollen nun $E > 0$ betrachten

Notation: $E \equiv \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$, $E + V_0 \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

löse stat. S.-Glg $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi_E(x) = E\,\psi_E(x)$:

① $\psi_E'' = -k_0^2 \psi_E$, Lsg $\psi_E(x) = A e^{ik_0 x} + B e^{-ik_0 x}$

- diese WF ist <u>nicht</u> im gewöhnlichen Sinne ($\int dx\, |\psi_E|^2 = 1$) <u>normierbar</u>, man spricht von einem <u>Streuzustand</u>.

normierbare Zustände → <u>Wellenpakete</u>; diese sind nicht stationär; Streuzustände sind deren Bausteine

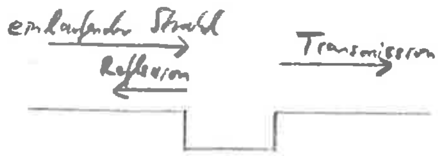
- der Wahrscheinlichkeits-Strom $\vec{j}$ (vgl. §1.4, S.9) hat aber trotzdem eine physikalisch sinnvolle Form:

$$
\begin{aligned}
j_x &= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left\{\psi_E^* \partial_x \psi_E\right\} \\
&= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left\{\left(A^* e^{-ik_0x} + B^* e^{ik_0x}\right) ik_0 \left(A e^{ik_0x} - B e^{-ik_0x}\right)\right\} \\
&= \frac{\hbar k_0}{m}\,\mathrm{Im}\Big\{ i \big(\underbrace{|A|^2 - |B|^2}_{\text{reell}} + \underbrace{AB^* e^{2ik_0x} - A^*B e^{-2ik_0x}}_{\text{imaginär}} \big) \Big\} \\
&= \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m}}_{\text{Geschwindigkeit}} |A|^2 - \frac{\hbar k_0}{m} |B|^2
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Strahl nach rechts $\longleftarrow$ Strahl nach links

③ $\psi_E'' = -k_0^2 \psi_E$, Lsg $\psi_E(x) = C e^{ik_0x} + D e^{-ik_0x}$

- wollen hier das folgende Experiment betrachten:



d.h. wir verlangen als Randbedingung, dass es in ③ keinen linkslaufenden Strahl gibt $\Rightarrow$ $\underline{D = 0}$.

② $\psi_E'' = -k^2 \psi_E$, Lsg $\psi_E(x) = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$

Anschlussbedingungen ψ_E und ψ_E' stetig bei $x = \pm L$

$$x=-L: \quad A e^{-ik_0L} + B e^{ik_0L} = F e^{-ikL} + G e^{ikL} \qquad (1)$$

$$ik_0\left(A e^{-ik_0L} - B e^{ik_0L}\right) = ik\left(F e^{-ikL} - G e^{ikL}\right) \qquad (2)$$

$$x=+L: \quad C e^{ik_0L} = F e^{ikL} + G e^{-ikL} \qquad (3)$$

$$ik_0 C e^{ik_0L} = ik\left(F e^{ikL} - G e^{-ikL}\right) \qquad (4)$$

- haben diesmal 4 Gln für 5 Koeffizienten
  $\Rightarrow$ es gibt Lösungen für alle k_0, also keine Quantisierung!
- können zunächst F, G eliminieren:

$$ik\,(3) + (4) \Rightarrow i(k+k_0) C e^{ik_0L} = 2ik F e^{ikL}$$

$$\Leftrightarrow F = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{k_0}{k}\right) C e^{i(k_0-k)L}$$

$$-ik\,(3) + (4) \Rightarrow i(-k+k_0) C e^{ik_0L} = -2ik G e^{-ikL}$$

$$\Leftrightarrow G = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{k_0}{k}\right) C e^{i(k_0+k)L}$$

- dies in (1), (2) einsetzen und A, B bestimmen:

$$k\,(1) \Rightarrow k\left(A e^{-ik_0L} + B e^{ik_0L}\right) = \frac{C}{2}\left[(k+k_0) e^{i(k_0-2k)L} + (k-k_0) e^{i(k_0+2k)L}\right] \quad (5)$$

$$\tfrac{1}{i}\,(2) \Rightarrow k_0\left(A e^{-ik_0L} - B e^{ik_0L}\right) = \frac{C}{2}\left[(k+k_0) e^{i(k_0-2k)L} - (k-k_0) e^{i(k_0+2k)L}\right] \quad (6)$$

$$\tfrac{1}{k}(5) + \tfrac{1}{k_0}(6) \Rightarrow 2A e^{-ik_0L} = \frac{C}{2}\left[\left(2 + \tfrac{k_0}{k} + \tfrac{k}{k_0}\right) e^{i(k_0-2k)L} + \left(2 - \tfrac{k_0}{k} - \tfrac{k}{k_0}\right) e^{i(k_0+2k)L}\right]$$

$$\Leftrightarrow A = C e^{2ik_0L}\left[\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^{2ikL} + e^{-2ikL}\right)}_{=\cos(2kL)} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k_0}{k} + \tfrac{k}{k_0}\right)\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^{2ikL} - e^{-2ikL}\right)}_{=i\sin(2kL)}\right]$$

Definitionen

Transmissionskoeffizient $\quad T = \dfrac{|\vec{j}(x>L;\,\text{rechts})|}{|\vec{j}(x<-L;\,\text{rechts})|} = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}$

Reflexionskoeffizient $\quad R = \dfrac{|\vec{j}(x<-L;\,\text{links})|}{|\vec{j}(x<-L;\,\text{rechts})|} = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}$

$$\Rightarrow T^{-1} = \cos^2(2kL) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{k_0}{k} + \tfrac{k}{k_0}\right)^2 \sin^2(2kL) = 1 + \frac{(k_0^2 - k^2)^2}{4k^2k_0^2}\sin^2(2kL)$$

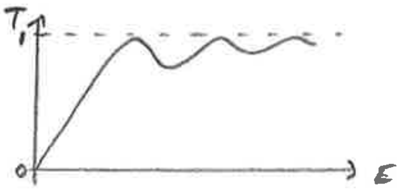
$$\Leftrightarrow T = \left\{1 + \left[\left(\tfrac{k_0}{k} - \tfrac{k}{k_0}\right)\frac{\sin(2kL)}{2}\right]^2\right\}^{-1} \quad \text{mit (s.o.)} \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

Übung, Aufg 11: $R = T \cdot \left[\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\frac{\sin(2kL)}{2}\right]^2$

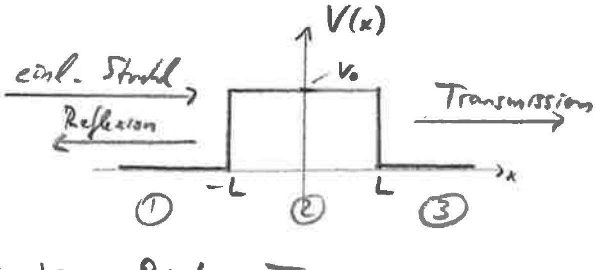
- damit gilt insgesamt $0 \leq T \leq 1$, $0 \leq R \leq 1$, $T+R=1$
  d.h. die Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten!

Resonanz
- betrachten wir die Energieabhängigkeit von T genauer:
  $$\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}} - \frac{\sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E}}\right)^2 = \frac{V_0^2}{E(E+V_0)}$$
  $$\Rightarrow T(E) = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2(2kL)} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$
- also ist $T(E)$ i.A. eine wachsende Fkt der Energie, und $\lim_{E\to\infty} T(E) = 1$. D.h. ein Teilchen mit großer Energie ($E \gg V_0$) läuft einfach durch den Kasten, ohne ihn zu bemerken.
- falls aber $2kL = n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$, ist $T(E)=1$ schon bei endlicher Energie! Man spricht von einer Resonanz.
  $\Rightarrow$ die Resonanzenergien erfüllen $\sqrt{\frac{2m(E_R+V_0)}{\hbar^2}}\,2L = n\pi \Leftrightarrow E_R = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{8mL^2} - V_0$
- physikalische Interpretation:
  die bei $x=L$ und bei $x=-L$ reflektierten Wellen interferieren destruktiv, so dass alles transmittiert wird.
  (es gilt also doch noch "Quantisierung" bei der Streuung)
- graphisch:



2.4 Tunneleffekt

statt Potentialtopf nun Potentialbarriere:



klassisch: erwarten für $E < V_0$: $R=1$, $T=0$
$E > V_0$: $R=0$, $T=1$