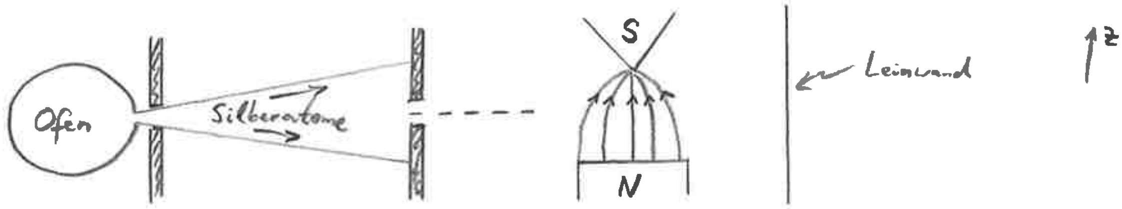
einfaches QM-Bsp.: 2-Zustands-System (Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen)



Stern + Gerlach, 1922

Ag: 47 Elektronen, Ges.-Drehimpuls vom Spin des 47^ten e^-

→ magnet. Dipolmoment μ

→ Kraft im inhomog. Magnetfeld $F_z = -\partial_z V = \mu_z \partial_z B_z$

(klassisch erwartet)

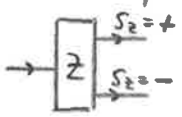
(gemessen)

$\Rightarrow \mu_z \approx \pm \frac{e\hbar}{2mc} = \frac{e}{mc} S_z$ mit $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ ist quantisiert!

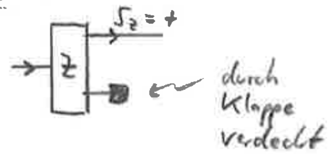
zum Messprozess

benutze Stern-Gerlach-Experimente als "Bauteile":

"Strahlteiler"

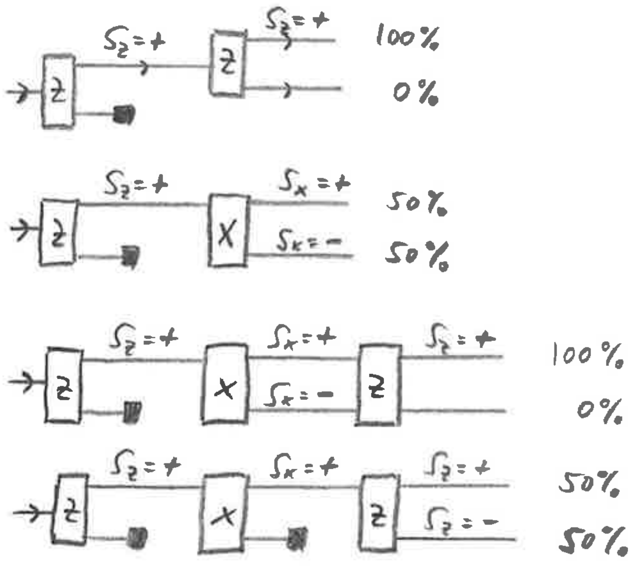


und "Filter"



habe ebensolche Bauteile für z.B. x-Richtung ("gedrehtes S-G-E")

Experimente mit Teilchenstrahlen (oder einzelnen T.):



(S_x nicht gemessen)

(S_x gemessen)

$\Rightarrow$ kann S_z, S_x nicht gleichzeitig messen (($S_z S_x \neq S_x S_z$, später...))

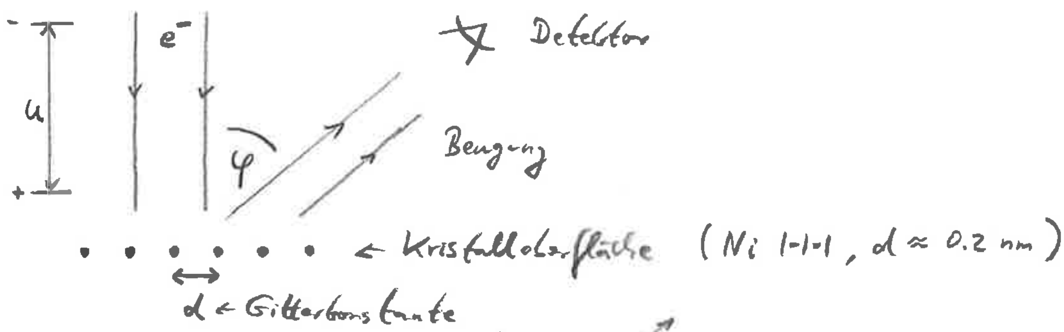
Wellennatur von Teilchen: Bsp.

Elektronen durch Spannung U beschleunigen

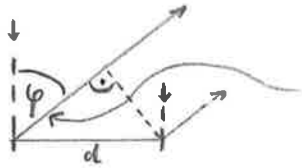
$\rightarrow E = \frac{p^2}{2m_e} \stackrel{!}{=} eU \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U}} \approx \frac{1.2 \text{ nm}}{\sqrt{U \text{ (in Volt)}}}$

((typ. Wellenlängen: Gamma ($\lesssim$ pm), Röntgen (nm), UV (100 nm), sichtbar (400–700 nm), IR (μm), Radar (cm), Radio (m – km), ...))

Experiment (Davidson, Germer 1927)



Unterschied der Wege:



$\Delta l = d \cdot \cos(90 - \varphi) = d \cdot \sin(\varphi)$

$\rightarrow$ Intensitätsmaximum bei konstruktiver Interferenz erwartet, also für $\quad d \cdot \sin(\varphi) = n \cdot \lambda \quad (n = 1, 2, \dots)$

$\Rightarrow$ dies wurde auch beobachtet! $\rightarrow$ Nobelpreis 1929 für de Broglie

1.2 Freie Teilchen

Beschreibung

QM verwendet **Wellen**: $\left\{ \begin{array}{lll} \text{an einem Ort} & \phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \alpha) \\ \text{zu einem Zeitpkt} & \phi(x) = \phi_0 \sin(kx + \beta) \end{array} \right.$

└ ((klass. ED, Hydrodyn. auch))

aber $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kreisfrequenz } \omega \\ \text{Wellenzahl } k \end{array} \right\}$ können auch als $\left\{ \begin{array}{l} \text{Energie } E = \hbar\omega \\ \text{Impuls } p = \hbar k \end{array} \right\}$

eines **Teilchens** interpretiert werden ("Welle-Teilchen-Dualismus")

Bem.:
- ebene Welle: 

  Wellenpaket:  (Linearkombination)
- allg. Welle ist LK ebener Wellen
  - $\rightarrow$ hat also kein bestimmtes k bzw. p
  - $\rightarrow$ könnte einen Mittelwert $\langle p \rangle(t)$ besitzen

- für eine ebene Welle nennt man den Zusammenhang
  $\omega = f(k)$ <u>Dispersionsrelation</u>

  dem entspricht die <u>Energie-Impuls-Beziehung</u> für Teilchen
  $E = g(p)$ ((z.B. $E_{nr} = \frac{p^2}{2m}$, oder $E_{rel} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$))

- physikalisch relevant (und messbar!) ist die
  Gruppengeschwindigkeit $v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$ ((nicht-rel: $v_G = \frac{p}{m} = v_{klassisch}$; rel: $v_G = \frac{pc^2}{E}$))

Die Wellenfunktion der QM ist eine komplexe Fkt.: $\psi(\vec{r},t) \in \mathbb{C}$ warum? → §1.4

→ zum Formulieren einer Wellenglg. für ψ ist Fourier nützlich:

<u>Fourier-Analyse</u> (Erinnerung) s. auch Ü3

(1 Dim.) $$f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-iqx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k-q)x}}_{= \delta(k-q)}$$

Dirac'sche Deltafkt.

$$\Rightarrow \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-iqx}$$

(3D) $$f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}\, f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

(3+1 D) Raum-Zeit $$\psi(\vec{r},t) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\psi}(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$ Konvention

fast – aber $\omega(\vec{k})$ wegen Dispersionsrelation, s.o.

$$\Rightarrow \psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega(\vec{k})t}$$

<u>Physik</u> kommt also durch Dispersionsrel. ins Spiel, welche laut de Broglie zur E-p-Beziehung äquivalent ist.
Hilft dies beim Formulieren einer Glg für ψ?

- für jede Fourier-Komp. (≡ ebene Welle) gilt:
  $$\begin{Bmatrix} E \\ \vec{p} \end{Bmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega(\vec{k})t} = \begin{Bmatrix} \hbar\omega(\vec{k}) \\ \hbar\vec{k} \end{Bmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega(\vec{k})t} = \begin{Bmatrix} i\hbar\partial_t \\ -i\hbar\vec{\nabla} \end{Bmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega(\vec{k})t}$$
- laut Disp.-Rel ist $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ bzw $\omega(\vec{k}) = \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}$
  für jedes $\vec{p}$ bzw. $\vec{k}$

- die Ersetzungen $E \hat{=} i\hbar\partial_t$ und $\vec{p} \hat{=} -i\hbar\vec{\nabla}$ sind aber unabhängig von $\vec{p}, \vec{k}$, falls sie auf die Fourier-Darst. der Wellenfkt. operieren.

$\Rightarrow$ Beziehung für die ganze Wellenfkt

$$\boxed{i\hbar\partial_t \psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}\psi(\vec{r},t)}$$

(("Schrödinger-Glg. für ein freies Teilchen"))

1.3 Schrödinger-Gleichung

folgt aus einer Verallgemeinerung der obigen Wellengl.:

i.A. hängt Teilchen-Energie (außer von Impuls) auch vom Ort ab,

$$E = H(\vec{p}, \vec{r})$$ (($\hat{=}$ Hamiltonfkt. in klass. Mechanik))

z.B.: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$ Potential

Schrödinger (1926): Form dieser Gln in QM übernehmen

$E \rightarrow i\hbar\partial_t$ und $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ ersetzen ← aber s.u. (cave)

auf Wellenfkt. operieren

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\partial_t \psi(\vec{r},t) = H(-i\hbar\vec{\nabla}, \vec{r})\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t)}$$

(Schrödingergl.)

Bem.:
- beschreibt Zeitentwicklung der Wellenfkt
- partielle Dgl. erster Ordnung in t
- linear: ψ_1, ψ_2 Lösungen $\Rightarrow$ $\psi_1 + \psi_2$ Lösung
  ψ_1 Lösung $\Rightarrow$ $N \cdot \psi_1$ Lösung, $N \in \mathbb{C}$
- braucht also Randbedingung und Normierung für eindeutige Lsg.

cave: z.B. $H_1 = p_i r_j$, $H_2 = r_j p_i$ (($i,j \in \{1,2,3\}$)) klass. äquivalent!

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kronecker-Delta

$[a,b] \equiv ab - ba$ Kommutator

QM: $(H_1 - H_2)\psi(\vec{r},t) \rightarrow \left[-i\hbar\partial_{r_i} r_j + r_j i\hbar\partial_{r_i}\right]\psi(\vec{r},t)$

$= i\hbar\left[-\delta_{ij} - \cancel{r_j\partial_{r_i}} + \cancel{r_j\partial_{r_i}}\right]\psi \neq 0$!

$$\Rightarrow \underline{[r_i, -i\hbar\partial_{r_j}] = i\hbar\delta_{ij}}$$ "Vertauschungsrel."; zentral in QM