Theoretische Physik II	**Klausur**	28.08.2012

[Bearbeitungszeit 2 Stunden ; Name und Matr-Nr auf jedes Blatt ; bei ≥ 20 Punkten garantiert bestanden]

Aufgabe 1: Teilchen im 1-D Potential (12 Punkte)

Gegeben Sei das Potential $V(x) = \{V_0 \text{ (für } |x| \leq a),\, 0 \text{ (für } a < |x| < b),\, \infty \text{ (für } |x| > b)\}$, wobei $V_0 \in \mathbb{R}^+$. Machen Sie einen Ansatz für die Energieeigenzustände gerader Parität für Energien $E > V_0$ und stellen Sie die transzendente Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte auf.

Aufgabe 2: Teilchen im Delta-Potential (12 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich im Potential $V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} V_0\, \delta(x)$, mit $V_0 \in \mathbb{R}^+$.

(a) Leiten Sie folgende Anschlussbedingungen her:
$\psi'(0^-) = \psi'(0^+) + V_0\, \psi(0)\,, \quad \psi(0^-) = \psi(0^+)\,.$

(b) Es gibt einen gebundenen Zustand.
Bestimmen Sie dessen Energieeigenwert und seine Wellenfunktion.

(c) Berechnen Sie den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten
für eine von links einlaufende Welle $\psi(x) = e^{ikx}$.

Aufgabe 3: Spinoszillationen (8 Punkte)

Der Hamilton-Operator für ein ruhendes Elektron im Magnetfeld laute $\hat{H} = -\mu\, B\, \hat{S}_z$.

(a) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit Randbedingung $\psi(t=0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Komponenten des Spinoperators

$$\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

und drücken diese mittels trigonometrischer Funktionen aus.

Aufgabe 4: Ritz'sches Variationsverfahren (10 Punkte)

Bestimmen Sie näherungsweise die Grundzustandsenergie eines anharmonischen Oszillators mit Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \lambda\hat{x}^4$, mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Inspiriert vom harmonischen Oszillator benutzen Sie dazu bitte den Variationsansatz $\varphi(x) = N\, \exp(-\alpha^2 x^2/2)$, um durch Variation des Parameters α den Energieerwartungswert zu minimieren.
Ihr Ergebnis für die Grundzustandsenergie sollte nur um 2% von dem durch numerische Integration der Schrödinger-Gleichung gewonnenen Wert $E_0 = 1.060\,(\hbar^4\lambda/(4m^2))^{1/3}$ abweichen (in welche Richtung?). [Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$; evtl. nach a differenzieren.]

Aufgabe 5: Dichtematrix (8 Punkte)

Die Dichtematrix eines Spin-$\frac{1}{2}$ Systems in der Eigenbasis von S_z sei $\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Was sind die Erwartungswerte bei Messung von S_x und S_z? Liegt ein reiner Zustand vor?

(b) Die Zeitentwicklung von ρ im Schrödingerbild sei durch $\rho(t) = U(t,t_0)\, \rho(t_0)\, U^\dagger(t,t_0)$ gegeben, wobei $U(t,t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator ist. Zeigen Sie, dass aus einem gemischten Zustand niemals ein reiner Zustand werden kann.

Viel Erfolg!