8. Ausblick / “Märchen”

weitere Themen in der nichtrelativistischen QM [→ QM II]

- **zeitabhängige Störungstheorie** ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\, \hat{H}_1(t)$)

  Hamilton-Op. $\hat{H}_0$ und ungestörte Zustände $|\varphi_n\rangle$ sind wie gehabt, vgl. §6.2; die Frage lautet jetzt:

  → mit welcher Wahrscheinlichkeit verursacht $\hat{H}_1(t)$ einen **Übergang** vom Zustand $|\varphi_i\rangle$ in den Zustand $|\varphi_f\rangle$?

  → Antwort: die W.-Amplitude dafür lautet ($W = |C_{fi}|^2$)

$$
\begin{aligned}
C_{fi} &= \langle\varphi_f(t=T)|\varphi_i(t=-T)\rangle \\
&= \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar}\int_{-T}^{T} dt \langle\varphi_f|\lambda\hat{H}_1(t)|\varphi_i\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t} + O(\lambda^2)
\end{aligned}
$$

  → wichtig z.B. für Strahlungsübergänge im Atom: induzierte Emission / Absorption

- **Streutheorie**

  Streuexperimente → Information über Aufbau der Materie; Kristallstrukturen; Teilchenwechselwirkungen; Kernkräfte; Ww-Potentiale; usw.

  [Abb: Rutherford-Streuung]

- **Teilchen in elektromagnetischen Feldern**

  E-Dynamik: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

  $\phi \equiv$ Skalarpotential, $\vec{A} \equiv$ Vektorpotential

  QM ⇒ $\hat{H} = \frac{1}{2m}[\hat{\vec{p}} - \underbrace{e\vec{A}(\vec{r},t)}_{\text{neu}}]^2 + \underbrace{e\phi(\vec{r},t)}_{\text{Potential}}$

Verallgemeinerungen der nichtrel. QM

Form der Schrödinger Glg $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ bleibt bestehen, aber $\hat{H}$ kann anders aussehen

- **ein relativistisches Teilchen** [→ QM II]

  (vgl. §6.5, H-Feinstruktur)

  eine relativistische Glg muss Lorentz-kovariant sein!

  die lhs der SG ist linear in ∂_t ⇒ die rhs muss linear in $\vec{\nabla}$ bzw $\hat{\vec{p}}$ sein!

Dirac $\Rightarrow \hat{H}$ muss eine Matrix sein!

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{p}_i + \beta m, \quad \alpha_i, \beta \text{ Matrizen}$$

$\rightarrow$ d.h. in der nichtrel. Theorie gibt es die **Möglichkeit** für Spin;

in der relativistischen Theorie ist Spin eine **Notwendigkeit**

- **sehr viele (bzw. unbestimmte Anzahl von) Teilchen**

  $\rightarrow$ Statistische Physik: oft sehr viele Teilchen ($N \sim 10^{23}$); in manchen Ensembles ist T-Zahl keine gute Variable, sondern stattdessen das chemische Potential μ [$\rightarrow$ Theorie III, 5.Sem]

  $\rightarrow$ für relativistische Systeme: kann T-Zahl nicht fixieren,
  z.B.: [Abb: Photon-Elektron Loop] "virtuelles Teilchen/Antiteilchen Paar" [$\rightarrow$ Elementarteilchenphysik, 5.Sem]

  solche Systeme werden mit **Quantenfeldtheorie** [$\rightarrow$ QFT, $\geq$ 6.Sem]

  beschrieben: $\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \hat{\vec{p}}_i^{\,2} + \cdots \rightarrow \int d^3\vec{r} \left\{ \frac{1}{2m} [\partial_i \hat{\phi}(\vec{r},t)]^2 + \cdots \right\}$

Pfadintegralformulismus [$\rightarrow$ QMII; QFT] [s. Münster §24]
es gibt (genau wie in der klass. Mech.) auch in QM verschiedene Formulierungen:

	klassisch		quantenmechanisch
Hamilton:	$H(p,x)\,,\ H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$	$\Leftrightarrow$	kanonisch: $i\hbar\partial_t\|\psi\rangle = \hat{H}\|\psi\rangle$
Lagrange:	$L(\dot{x},x)\,,\ L = \frac{1}{2}mx^2 - V(x)$	$\Leftrightarrow$	Pfadintegrale: Feynman (1948)

zentrale Formel:

$$\langle \vec{r}\,' | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} | \vec{r} \rangle = \int_{\vec{x}(t)=\vec{r}}^{\vec{x}(t')=\vec{r}\,'} \mathcal{D}\vec{x}(t) \exp\left(\underbrace{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt'' L(\dot{x},x)}_{\equiv \text{Wirkung}} \right)$$

$\rightarrow$ alles ist klassisch, d.h. keine Operatoren, aber man muss über <u>alle</u> möglichen Bahnen summieren. [Abb: Pfade]
$\rightarrow$ Pfadintegrale sind formell eine Umformulierung der QM; sehr elegant + intuitiv; erlaubt Lösung einiger Probleme, die mit kanonischen Methoden extrem schwierig sind.

Anwendungsbereiche

- **Atom- und Molekülphysik**
  typische Massen: $m_e = 511$ keV$/c^2$
  typische Energien: $E \leq \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \approx 13.6$ eV
  typische Abstände: $a_0 \geq \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-10}$ m

- **Kernphysik**
  typische Massen: $m_p = 938$ MeV$/c^2$
  (hier gibt es jedoch keine kleine Feinstrukturkonstante wie α)
  typische Energien $\sim (m_n - m_p)c^2 \approx 1.3$ MeV
  typische Abstände $\gg$ Proton-Radius $\sim \frac{\hbar c}{m_p c^2} \approx 0.2 \cdot 10^{-15}$ m

- **Elementarteilchenphysik**
  typische Energien $\geq m_p c^2 \sim 1$ GeV
  typische Abstände $\ll$ Proton-Radius

- **etc.** ...