4.5 Addition von Drehimpulsen

bei vielen Systemen kommen mehrere unabhängige Drehimpulse vor (siehe Beispiel 2 auf S.54, oder Übung Aufgabe 32), z.B.:

- Bahndrehimpuls $\hat{\vec{L}}$ und Spin $\hat{\vec{S}} \rightarrow \hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$
- zwei Teilchen mit jeweils $\hat{\vec{J}}^{(1)}$ und $\hat{\vec{J}}^{(2)} \rightarrow \hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}^{(1)} + \hat{\vec{J}}^{(2)}$

benutze hier die $J+J$-Notation

$\longrightarrow$ zwei Möglichkeiten für Wahl von vertauschenden Operatoren:

(1) $\hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{\vec{J}}_3^{(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}, \hat{\vec{J}}_3^{(2)}$ (denn: $[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_l^{(2)}] = 0$)
EZ: $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$
direktes Tensorprodukt der Vektorräume (jeder $2j_i + 1$ - dim.)

(2) $\hat{\vec{J}}^2, \hat{\vec{J}}_3, \hat{\vec{J}}^{2(1)}, \hat{\vec{J}}^{2(2)}$ (denn: $[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}^{(2)}] = 0 = [\hat{J}_k, \hat{\vec{J}}^{2(2)}]$)
EZ: $|j_1 j_2 JM\rangle$ mit $\hat{\vec{J}}^2 |j_1 j_2 JM\rangle = \hbar^2 J(J+1) |j_1 j_2 JM\rangle$
und $\hat{J}_3 |j_1 j_2 JM\rangle = \hbar M |j_1 j_2 JM\rangle$

$\longrightarrow$ können einen Basiswechsel zwischen diesen beiden Möglichkeiten durchführen:

$$|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM\rangle}_{\text{Clebsch}-\text{Gordan}-\text{Koeffizienten}}$$

$\longrightarrow$ wir müssen also diese Übergangsamplituden (C-G-Koeffizienten) bestimmen.

Seien j_1, j_2 gegeben $\longrightarrow$ mögliche Werte von J, M?

- in der Basis $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ gilt es $(2j_1+1)(2j_2+1)$ Zustände, also auch soviele in der Basis $|j_1 j_2 JM\rangle$.
- $\hat{J}_3 = \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \Longrightarrow M = m_1 + m_2$
- $-j_1 \le m_1 \le j_1$ und $-j_2 \le m_2 \le j_2$

$\Leftrightarrow -j_1 \le M - m_2 \le j_1$ und $-j_2 \le M - m_1 \le j_2$

$\Leftrightarrow -j_1 \le J - j_2 \le j_1$ und $-j_2 \le J - j_1 \le j_2$

$\Leftrightarrow j_2 - j_1 \leq J \leq j_1 + j_2$ und $j_1 - j_2 \leq J \leq j_1 + j_2$

$$\Rightarrow |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$$

- die Quantenzahlen m_1 wachsen in Einheiten von 1 ($m_i \in \{-j_i, ..., j_i\}$)

  $\Rightarrow$ die Quantenzahl $M = m_1 + m_2$ wächst in Einheiten von 1

  $\Rightarrow$ alle J müssen entweder ganz- oder halbzahlig sein

$$J \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \cdots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2\}$$

- Test: Gesamtzahl der Zustände (sei o.B.d.A $j_1 \geq j_2$)

$$\begin{aligned}
\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J+1) &= \sum_{J=1}^{j_1+j_2} (2J+1) - \sum_{J=1}^{j_1-j_2-1} (2J+1) \\
&= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1) + (j_1+j_2) - (j_1-j_2-1)(j_1-j_2) \\
&\quad -(j_1-j_2-1) \\
&= \cdots = (2j_1+1)(2j_2+1)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ die verschiedenen J-Werte sind also **nicht "entartet"**, d.h. müssen nur einmal gezählt werden.

Bestimmung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten
können wieder die Leiteroperatoren sowie die allg. Ergebnisse von S.48 benutzen:

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle = C_\pm(j, m)|j, m \pm 1\rangle \quad \text{mit} \quad C_\pm(j, m) = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \quad (*)$$

Strategie:

(a) betrachte "M-maximalen" Zustand $|j_1 j_2 J J\rangle$;

wegen $m_1 + m_2 = M$ ist $|j_1 j_2 J J\rangle = \sum_n a_n |j_1 j_2 \overbrace{(j_1 - n)}^{m_1} \overbrace{(J - j_1 + n)}^{m_2}\rangle$

wobei $n \in \{0, 1, \cdots\}$ alle Werte mit $\left\{ \begin{array}{c} -j_1 \leq j_1 - n \leq j_1 \\ -j_2 \leq J - j_1 + n \leq j_2 \end{array} \right\}$ annimmt

(b) operiere mit $\hat{J}_+ = \hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)}$ auf diese Gleichung:
$lhs = 0$, auf der rhs $(*)$ benutzen;
$\rightarrow$ erhalte lineare Gleichungen für die a_n

(c) Normierungsbedingung $\sum_n |a_n|^2 \stackrel{!}{=} 1$

(d) wähle eine Phasenkonvention; z.B. Condon-Shortley: $a_0 \in R^+$

(e) $|j_1 j_2 J(J-1)\rangle$ durch Operation mit $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}$ usw.

Bsp.: $j_1 = 2\,,\ j_2 = 3\,,\ J = 3 \in \{1,2,3,4,5\}$

(a) $|23\underbrace{3}_{J}\underbrace{3}_{M}\rangle = a_0|23\underbrace{2}_{m_1}\underbrace{1}_{m_2}\rangle + a_1|2312\rangle + a_2|2303\rangle$

(b)

$$\begin{aligned} 0 &= a_0\hat{J}_+^{(2)}|2321\rangle + a_1(\hat{J}_+^{(1)} + \hat{J}_+^{(2)})|2312\rangle + a_2\hat{J}_+^{(1)}|2303\rangle \\ &\overset{(*)}{=} \hbar\left\{a_0\sqrt{2\cdot 5}|2322\rangle + a_1\sqrt{1\cdot 4}|2322\rangle + a_1\sqrt{1\cdot 6}|2313\rangle + a_2\sqrt{2\cdot 3}|2313\rangle\right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{10}a_0 + 2a_1\,, \quad 0 = a_1 + a_2$$
$$\Rightarrow \text{Lsg} \quad a_1 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}}a_0\,, \quad a_2 = \sqrt{\tfrac{5}{2}}a_0$$

(c) $1 \overset{!}{=} |a_0|^2(1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}) \Rightarrow |a_0| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

(d) $a_0 = +\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \quad a_1 = -\sqrt{\frac{5}{12}}\,, \quad a_2 = \sqrt{\frac{5}{12}}$

(e) $\hat{J}_-$ auf Glg.(a) anwenden, $(*)$ benutzen:

$$\begin{aligned} C_-(3,3)|23\underbrace{3}_{J}\underbrace{2}_{M}\rangle &= a_0\{C_-(2,2)|2311\rangle + C_-(3,1)|2320\rangle\} \\ &+ a_1\{C_-(2,1)|2302\rangle + C_-(3,2)|2311\rangle\} \\ &+ a_2\{C_-(2,0)|23\,{-1}3\rangle + C_-(3,3)|2302\rangle\} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

→ man findet die Clebsch-Gordan-Koeffizienten in Tabellen (s. z.B. homepage); manchmal werden sie auch als "$3j$-Symbole" ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 J \\ m_1 m_2 M \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1-j_2-M}}{\sqrt{2J+1}}\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J\, {-M}\rangle$$

→ für Mathematica-Fans: `ClebschGordan[{j1,m1},{j2,m2},{J,M}]`

→ Anwendungen: Übungen