Theoretische Physik II	**Sonderblatt 1**	10.4.2012

Das **Gauß-Integral** wird uns in der QM wiederholt über den Weg laufen:

$$I(p,c) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\; e^{-p(t+c)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \qquad \text{für alle } p, c \in \mathbb{C} \quad \text{mit } Re(p) > 0$$

Zum Beweis schreiben wir $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und unterscheiden zwei Fälle:

- $b = 0$

  Mit Substitution $u = t + a$ ergibt sich zunächst

  $$I(p,a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\; e^{-p(t+a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\; e^{-pu^2} = I(p,0)\ .$$

  Und dann helfen Polarkoordinaten weiter,

  $$[I(p,0)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-px^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\; e^{-py^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\; r\, e^{-pr^2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2p}\right) e^{-pr^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{p}\ ,$$

  wobei im letzten Schritt $Re(p) > 0$ gebraucht wurde, damit e^{-pr^2} an der oberen Grenze verschwindet.

- $b \neq 0$

  Hier kommt ein Stück komplexe Analysis (oder Funktionentheorie) ins Spiel.
  Wähle $A \in \mathbb{R}$ mit $A > |a|$. Dann verschwindet [wegen Cauchy's Theorem und weil e^{-pz^2} eine ganze (bzw komplex-analytische bzw holomorphe) Funktion ist] das folgende geschlossene Wegintegral:

  $$\int_{-A}^{A} \mathrm{d}x\; e^{-p(x+i0)^2} + \int_0^b \mathrm{d}y\; e^{-p(A+iy)^2} + \int_A^{-A} \mathrm{d}x\; e^{-p(x+ib)^2} + \int_b^0 \mathrm{d}y\; e^{-p(-A+iy)^2} = 0$$

  Im Limes $A \to \infty$ ist aber der erste Term genau $I(p,0)$, und Term zwei und vier veschwinden wieder wegen $Re(p) > 0$. Also ist insgesamt (mit Substitution $t = x - a$)

  $$I(p,0) = -\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}x\; e^{-p(x+ib)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\; e^{-p(t+a+ib)^2} = I(p,c)\ ,$$

  was zu beweisen war.