

5. Dirac, Anderson, das Positron und die Antimaterie

Die **Wellengleichung Schrödingers** von 1926 stellte zwar den ersten Höhepunkt der 'neuen' Quantenmechanik dar, hatte aber noch einen entscheidenden 'Geburtsfehler': die **spezielle Relativitätstheorie** war in sie **nicht** integriert. Paul A.M. **Dirac** gelang es schon 1928, eine **relativistische Wellengleichung** für **Fermionen** (also insbesondere für Elektronen) aufzustellen, die berühmte '**Diracgleichung**' (DG). Einer der größten Erfolge dieser Gleichung war, dass der **Spin** $S = 1/2 \hbar$ des Elektrons '**automatisch**' aus dieser Gleichung folgte, und nicht -wie noch bei der Schrödingergleichung- im 'nachhinein' eingeführt werden musste. Erkauft wurde dies allerdings durch die sehr komplexe Struktur der neuen Gleichung: sie war nicht mehr 'eindimensional', sondern bestand aus **4x4 Matrizen**; daher bestand ihre Lösung auch **nicht** mehr aus **einer** Wellenfunktion Ψ , sondern einem '**Viererspinor**' $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$.

Wir gehen auf die DG hier nicht näher ein (zeigen sie hier nur zur 'Erinnerung' in verschiedenen Versionen), sondern konzentrieren uns auf ihre damals Vorhersage -die Existenz eines '**Antiteilchens**' des **Elektrons**-, und wie diese damals unglaubliche Hypothese in spektakulärer Weise von Carl David **Anderson** bestätigt wurde.

Eine der ursprünglichen nahe kommende Form der DG für das **freie** Elektron ist:



Paul A.M. Dirac 1902 - 1984

$$(\gamma_0 1/c \partial/\partial t + \gamma_1 \partial/\partial x + \gamma_2 \partial/\partial y + \gamma_3 \partial/\partial z - i/\hbar m) \psi = 0 \quad (5.1)$$

mit den '**Gamma-Matrizen**' γ_k ($k = 1, \dots, 3$) = $\begin{pmatrix} 0, & -\sigma_k \\ \sigma_k, & 0 \end{pmatrix}$ und der **4x4 Einheitsmatrix** γ_0 , wobei die ' σ_k ' die **2x2 Paulimatrizen** und die '0' **2x2 'Nullmatrizen'** bedeuten. Explizit ist also z.B. γ_2 :

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & i \\ 0, & 0, & -i, & 0 \\ 0, & -i, & 0, & 0 \\ i, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1a)$$

In der kompaktest möglichen Form erscheint die DG auf der Gedenkplakette, die in der Westminster Abbey gegenüber dem Grab von Newton angebracht wurde. Hier ist nach Theoretikersitte $c = \hbar = 1$ gesetzt ('leider' konnte man nicht auch noch $i = 1$ setzen!) und ein kovariantes **Viererprodukt** $\gamma^\mu \partial_\mu$ eingeführt (die Koordinate '0' ist die Zeit t , die Koordinaten 1, 2, 3 sind die Raumkoordinaten x, y, z), mit:

$\gamma^\mu = - \{ \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3 \}$ und $\partial_\mu = \{ \partial/\partial_0, \partial/\partial_1, \partial/\partial_2, \partial/\partial_3 \}$, woraus aus (5.1) folgt:

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m \Psi \quad (5.2)$$



Gedenkplatte in der Westminster Abbey

Etwas 'handlicher' und unter **Einschluss des Coulombpotentials V_C** für ein im Atom gebundenes Elektron kann man die eine Gleichung mit 4x4 Matrizen in **zwei gekoppelte** Gleichungen für die 'große' (Ψ_L) und die 'kleine' (Ψ_S) Komponente der Wellenfunktion Ψ des **gebundenen** Elektrons aufspalten, in der Form:

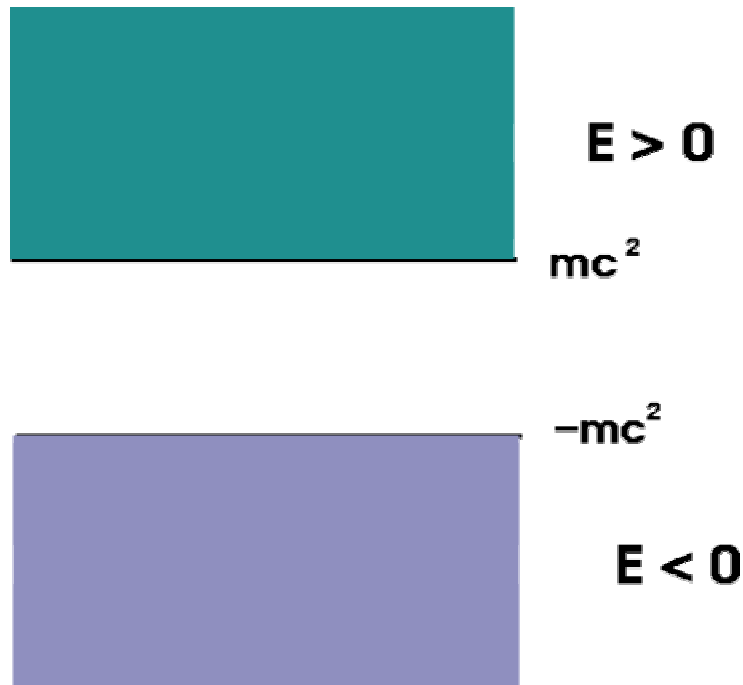
$$\begin{aligned} c \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \psi_S + mc^2 \psi_L + V_C \psi_L &= E \psi_L \\ c \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \Psi_L - mc^2 \Psi_S - V_C \Psi_S &= E \Psi_S \end{aligned} \quad (5.3)$$

dabei sind die $\boldsymbol{\sigma}$ die drei 'normalen' (2x2) Pauli-Matrizen, \mathbf{p} der Dreier-Impuls; Ψ_L bzw. Ψ_S sind jeweils zweikomponentige Spinoren, deren beide Komponenten den Spin parallel bzw. antiparallel zum Impuls \mathbf{p} angeben ('Helizität'). Für Lösungen mit positiver Energie E und schwachem Potential V_C ist die 'schmale' Komponente Ψ_S um einen Faktor $1/c^2$ kleiner als die 'große' Komponente Ψ_L und kann daher vernachlässigt werden (Grenzfall der Schrödingergleichung).

Für ein **freies Elektron** ($V_C = 0$) ergeben sich die **Eigenwerte E** :

$$E = +c \{p^2 + m^2 c^2\}^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad E = -c \{p^2 + m^2 c^2\}^{1/2} \quad (5.4)$$

für $V_C \neq 0$ und $Z < 1/\alpha$ ergeben sich **gebundene Zustände** mit $-mc^2 < E < +mc^2$



Was bedeuten nun die **negativen Eigenwerte** der Energie und was das **'Loch'** zwischen positiven und negativen Energielösungen?

Dirac nahm die negativen Energiezustände 'ernst', d.h. er verwarf sie nicht a priori als 'unphysikalisch' -sonst hätte man ja fragen müssen, warum sie sich überhaupt als mögliche Eigenwerte einer 'richtigen' Gleichung ergeben. Um aber die **'Katastrophe'** von Übergängen aus positiven in negative Energiezustände zu **vermeiden** (die Natur geht immer in das Minimum der Energie!), postulierte Dirac, dass

1. **alle negativen Energiezustände** mit der nach dem Pauliprinzip möglichen Zahl von Elektronen **besetzt** sind.
2. dass man daher diesen vollen 'Diracsee' **nicht beobachten** kann, es sei denn, man befördert eines dieser Elektronen in das positive Energiekontinuum (wozu mindestens eine Energie von $2mc^2$ erforderlich ist), oder in einen gebundenen Zustand im Bereich $-mc^2 < E < +mc^2$, falls ein solcher verfügbar ist. Das 'Loch' im negativen Energiekontinuum hat dann alle Eigenschaften (Masse, Spin,...) eines Elektrons **mit Ausnahme der Ladung**, die jetzt **positiv** ist. Ein solches 'Loch', genannt **'Positron'**, ist daher als das **'Antiteilchen'** des Elektrons zu interpretieren, sozusagen als ein 'fehlendes' Elektron (in der Interpretation Feynmans ist das Positron ein Elektron, das 'rückwärts in der Zeit läuft').
3. ein solches 'Loch' kann, wenn es auf ein 'normales' Elektron trifft und bei Anwesenheit eines dritten Partners (für Impuls- und Energieerhaltung) **in zwei unter 180° emittierte Gammaquanten zerstrahlen**, deren Energie jeweils gleich der Ruheenergie ist, für ein Elektron-Positron-Paar also **jeweils 511 keV**.
4. dasselbe Schema gilt **für alle Fermionen**, wobei das **'Energieloch'** zwischen 'Ober- und Unterwelt' **zweimal der Ruheenergie** der entsprechenden Fermionensorte entspricht: für **Proton/Antiproton** also z.B. **$2 \times 938 \text{ MeV} = 1,88 \text{ GeV}$** .

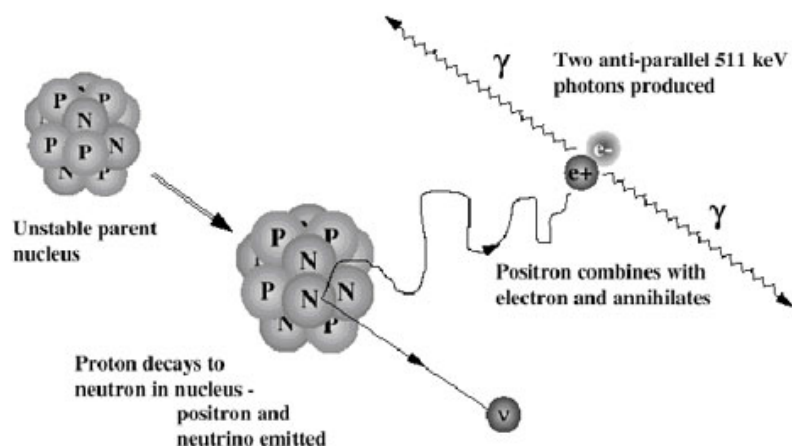


Figure 1.1. Positron emission and annihilation.

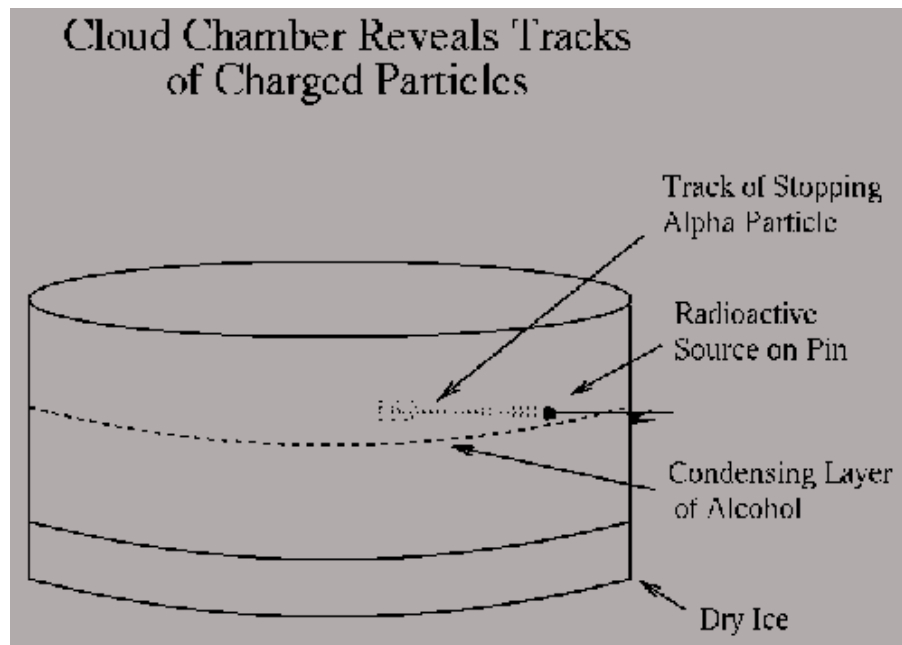
Erzeugung eines **Positrons** im β^+ Zerfall und anschließende Annihilation

Die **Hypothese der 'Antimaterie'** war natürlich eine alle Fundamente der etablierten Physik erschütternde Behauptung. Daher stürzten sich alle Physiker, die eine gute Nachweisidee oder eine gute Apparatur oder beides hatten, darauf, dieses **Antielektron** nachzuweisen. Am schnellsten war



Carl David Anderson 1905 - 1991

Er benutzte als Detektor die 1910 von Wilson erfundene **Nebelkammer**. In ihr befindet sich übersättigter Wasserdampf, der beim Eintritt eines energetischen ionisierenden Teilchens längs der Bahn kondensiert. Zusätzlich durchsetzt ein starkes **Magnetfeld B** diese Nebelkammer, sodass ein **geladenes Teilchen einen Kreisbogen** beschreibt, wenn B senkrecht auf der Bahnebene steht, bzw. allgemein einen Ellipsenbogen.



Schema einer **Wilsonschen Nebelkammer**

Für einen Kreisbogen mit dem Kreisradius ρ ergibt sich aus der Bedingung: **Zentrifugalkraft** (mv^2/ρ) = **Lorentzkraft** ($q v B$) die Beziehung:

$$B\rho = mv/q \quad (5.5)$$

Kennt man die Stärke und Richtung des Magnetfelds ergibt sich das **Vorzeichen der Ladung q** aus der **Bahnkrümmung**, aber nur, wenn man weiß, ob das Teilchen von 'oben' oder 'unten' kam. Aus der Bestimmung des Krümmungsradius' ρ ergibt sich dann **Impuls/Ladung** (mv/q) des unbekanntes Teilchens. Nimmt man zusätzlich an, dass das Teilchen nur **eine** (positive oder negative) Elementarladung trägt, also $q = +/- e$ ist, dann kennt man den **Impuls** (mv) -mehr aber nicht.

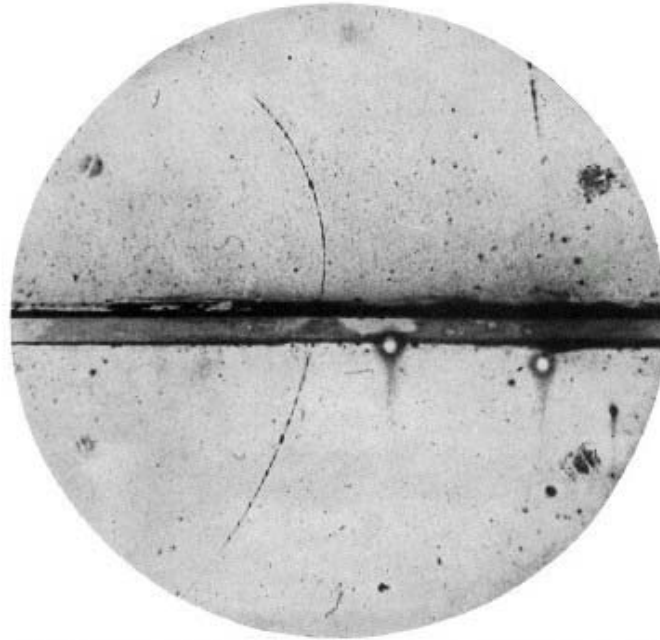
Es ergaben sich daher mindestens drei ganz schwierige Probleme:

1. Was kann man als '**Positronenquelle**' benutzen?
2. Wie kann man das **Vorzeichen der Ladung** bestimmen? (Kam das Teilchen von 'oben' oder von 'unten'?)
3. Wie kann man das gesuchte 'neue' **Positron** mit der Elektronenmasse m_e und positiver Ladung $q = + e$ **von einem Proton unterscheiden**, da man ja nur das **Produkt mv** misst?

Eine gewisse Ironie zeigt sich darin, dass man zwei Jahre vor dem Andersonschen Experiment den Betazerfall der Atomkerne entdeckt hatte - aber zunächst nur in der Form des β^- Zerfalls ($n \rightarrow p + e^- + \nu$). Wäre der β^+ Zerfall ($p \rightarrow n + \text{Positron} (e^+) + \nu$) auch schon bekannt gewesen, hätte man 'bloß' **eine β^+ Quelle** in die Nebelkammer halten müssen! In Unkenntnis dieser Dinge versuchte Anderson, die Positronen in der **kosmischen Strahlung** zu entdecken.

Das zweite Problem löste Anderson in genialer Weise. Er teilte seine Nebelkammer durch eine **6 mm dicke Bleiplatte**, die die Energie der kosmischen Teilchen abschwächt. Daher muss die Bahnkrümmung **vor dem Durchgang** durch die Platte **geringer sein als nach dem Durchgang**, wodurch die Einfallsrichtung festliegt.

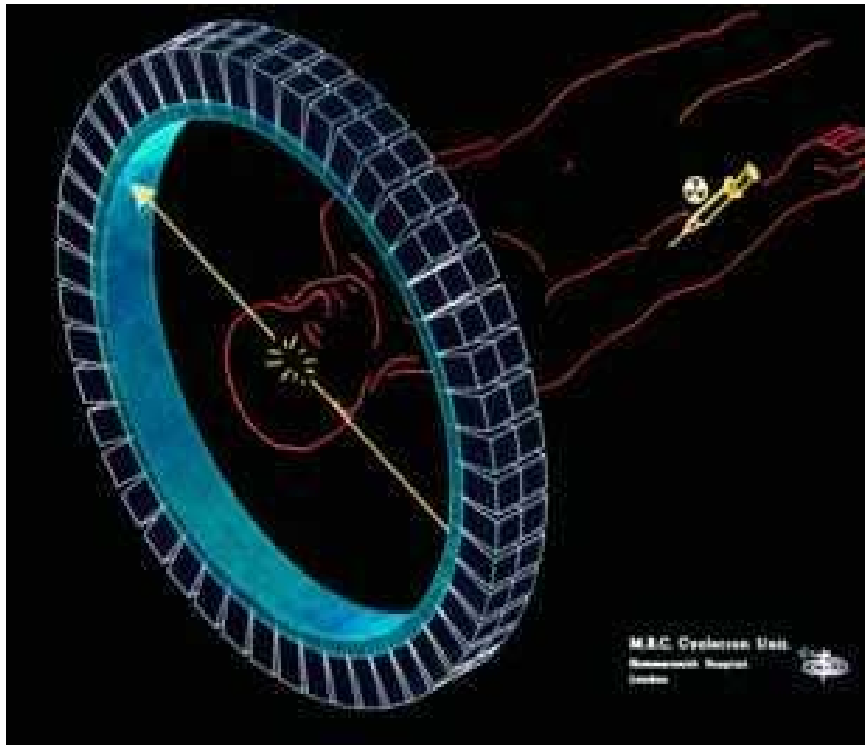
Das dritte Problem war am einfachsten zu lösen: für **Protonen** bzw. **Positronen** mit gegebenem Impuls mv ist die **Reichweite** in der Nebelkammer höchst **verschieden**. Die gemessene Reichweite konnte daher **nicht** von einem Proton mit dem Impuls mv stammen. Umgekehrt ergab sich aus ihr eine **obere Abschätzung für die Masse** des neuen, positiv geladenen Teilchens: es konnte **höchstens die zweifache Elektronenmasse** haben. So ergab sich die begründete Hypothese, dass das neu entdeckte Teilchen das von Dirac postulierte **Positron** sein musste. Zum ersten Mal in der Geschichte der Physik war '**Antimaterie**' entdeckt worden!



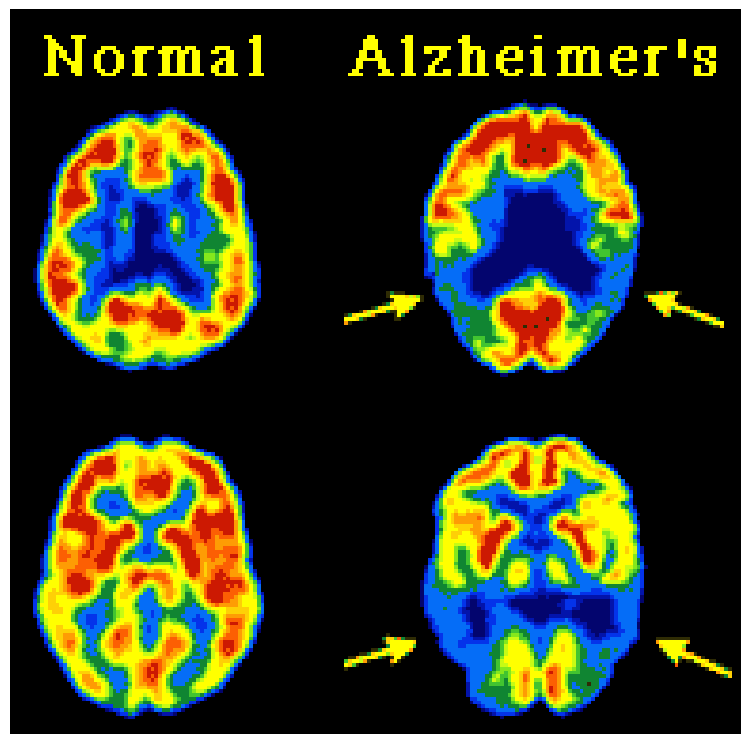
Der **erste 'Fingerabdruck' von Antimaterie**. Anderson entdeckte in seiner Nebelkammer (in der Mitte sichtbar ist die 6 mm dicke Bleiplatte) die Spur eines Teilchens, das sich als Antiteilchen des Elektrons herausstellen sollte. Aus der **im oberen Teil größeren Krümmung** erschloss er die **Einfallrichtung 'von unten'**; daraus dann aus der **Ablenkung nach 'links'** eine **positive Ladung**; aus dem **Krümmungsradius den Impuls** vor bzw. nach dem Durchgang durch das Blei. Unter der Annahme der Elektronenmasse für das neue Teilchen ergab sich aus dem **B_p -Wert im 'unteren' Teil** eine **Energie von 63 MeV**, aus dem **'oberen' B_p -Wert** eine Energie von **nur noch 23 MeV**. Aus diesem Energieunterschied kann man Protonen ausschließen und eine **obere Massengrenze von zwei Elektronenmassen** für das neue Teilchen, das **Positron**, angeben.

Heute hat man für alle stabilen und instabilen Elementarteilchen die Antiteilchen gefunden und genauestens vermessen. Man hat gelernt, dass die Geschichte des Universums in seiner Frühzeit bei der entsprechenden Temperatur eine dauernde **Umwandlung von Strahlung in Teilchen-Antiteilchen-Paare und umgekehrt** war. Noch ungelöst ist aber die Frage, warum nicht alle Paare schließlich in Strahlung annihilirt wurden, sondern 'Materie' übrigblieb und nur die 'Antimaterie' verschwand. Diese **Rätsel der 'Symmetriebrechung'** ('CP-Verletzung') bleibt eine Herausforderung für die nächsten Physikergenerationen.

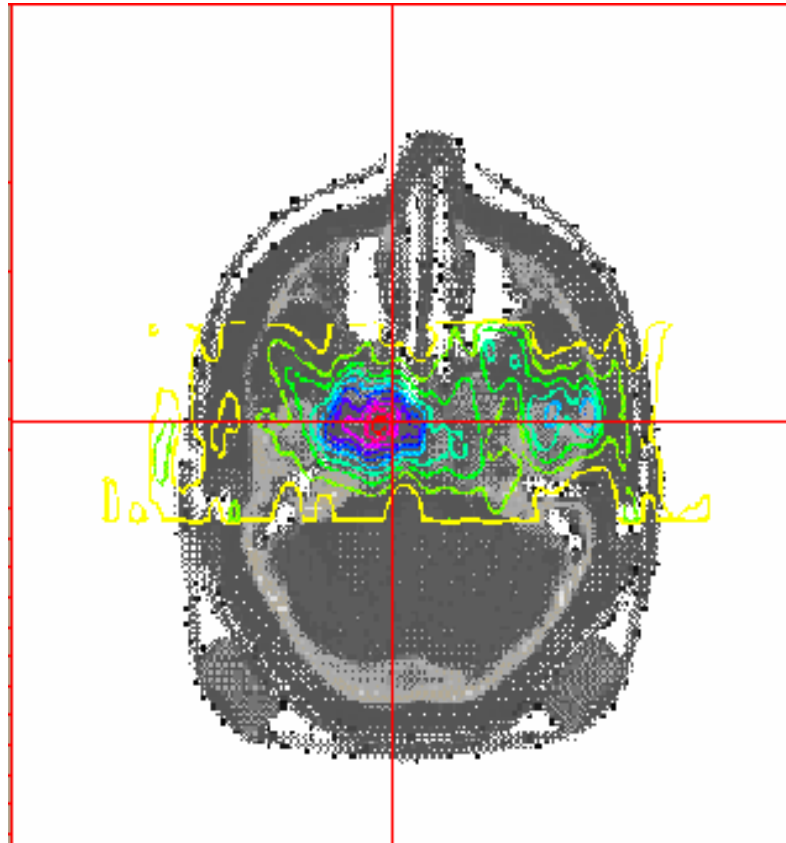
Auch in der praktischen Anwendung spielt Antimaterie heute eine große Rolle. Als Beispiel sei stellvertretend für vieles die **Positron-Emissions-Tomographie** (PET) genannt, bei der man z.B. **β^+ -aktive C-, O-, oder Fluor-Nuklide** in das Gehirn bringt und dort dann lokal die **Gehirnaktivität** misst über den Nachweis der kollinearen 511 keV Quanten der **Elektron-Positron Vernichtungsstrahlung**.



PET -'Kamera' aus segmentierten γ -Detektoren

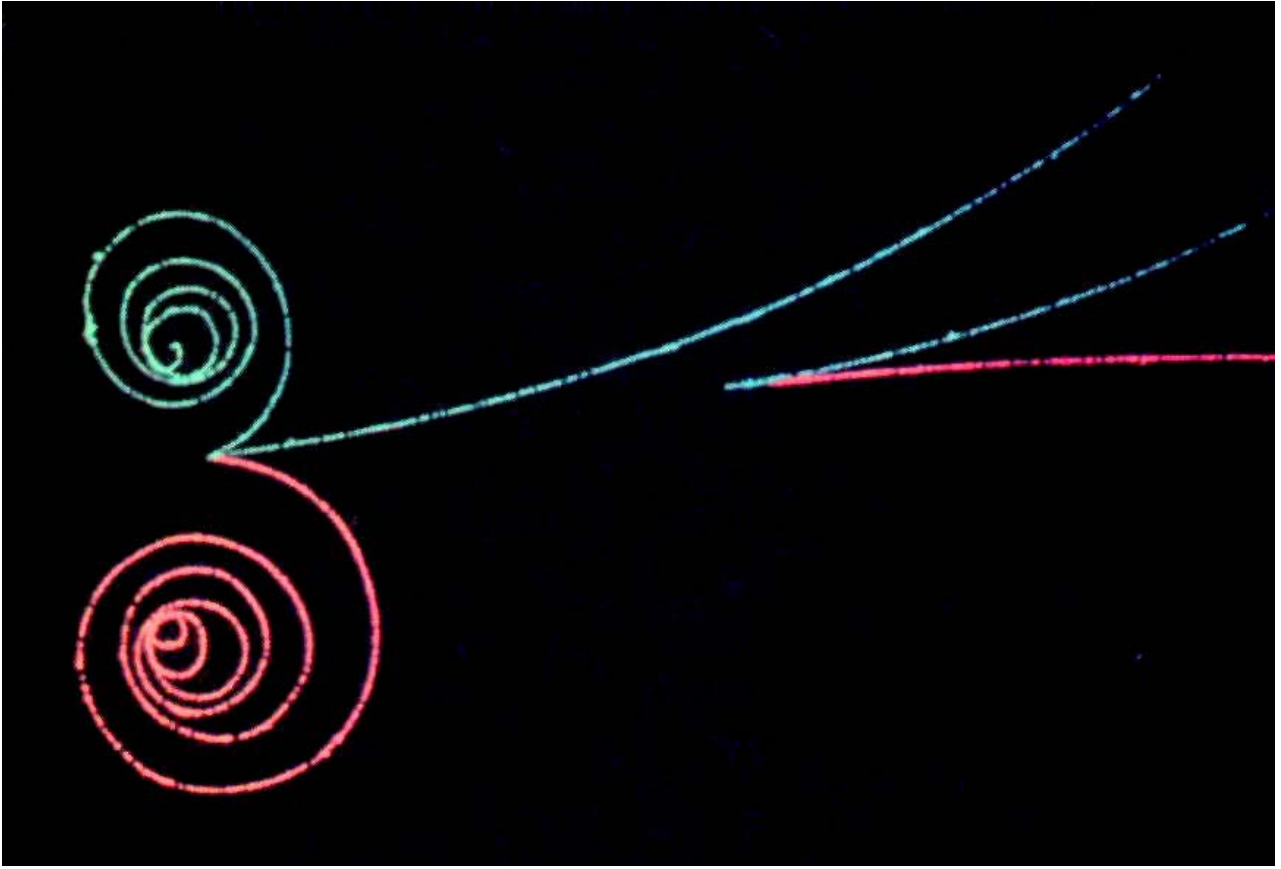


Mit PET gemessene Gehirn-Aktivitäten



Lokale β^+ -Aktivität um das rote Fadenkreuz beim Beschuss eines Gehirntumors mit hochenergetischen $^{12}\text{C}^{6+}$ -Ionen (GSI Darmstadt)

Kurz vor dem Abstoppen der ^{12}C Ionen (400 MeV/amu) im Gehirntumor werden durch Kernreaktionen ^{10}C -Isotope erzeugt, die nach kurzer Zeit (ca. 20s) in ^{10}B -Atome zerfallen, unter Aussendung von Positronen und Neutrinos. Die von der PET-Kamera registrierten kollinearen 511 keV Vernichtungsquanten der Positronen ermöglichen es 'on line', den genauen Ort des gestoppten Primärstrahls zu bestimmen.



Erzeugung eines **Elektron-Positron-Paares** in einer Blasenkammer