

## 4. Bohr, Stern, Gerlach, Pauli, Goudsmit, Uhlenbeck der Spin des Elektrons und die 'Fermistatistik'

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts stand die Frage nach Ursprung und Gesetzmäßigkeit der vielfältigen im optischen Bereich beobachteten Spektrallinien im Fokus der Atomphysik. Im Jahr 1885 veröffentlichte der Basler Zeichenlehrer Jakob Balmer eine empirisch gefundene Formel, die '**Balmerformel**', mit der sich die im optischen Bereich beobachteten Wasserstofflinien verblüffend gut wiedergeben ließen:

$$1/\lambda = \nu/c = R_H (1/2^2 - 1/n^2) \quad (4.1)$$

mit der '**Rydbergkonstanten**'  $R_H = 109737 \text{ cm}^{-1}$  ( $R_H \times hc = 1/2 m_e c^2 \alpha^2 = 13,6 \text{ eV}$ ) und  $n = 3, 4, \dots$ . Für  $n = 3$  ergibt sich z.B.  $1/\lambda = 15241,25 \text{ cm}^{-1}$ , also  $\lambda = 6,56 \times 10^{-5} \text{ cm} = 656 \text{ nm}$ , eine der stärksten sichtbaren Emissionslinien des Wasserstoffs. Später entdeckte T. Lyman Linien im UV, die sich alle gemäß

$$1/\lambda = R_H (1/1^2 - 1/n^2) \quad (4.1a)$$

beschreiben ließen, mit  $n = 2, 3, \dots$  ('**Lymanserie**'). Offenbar steckte eine einfache aber noch völlig unbekannte Gesetzmäßigkeit hinter allen diesen Linien. Niels Bohr, der als einer der wenigen Plancks Wirkungsquantum und die Einsteinsche Deutung des Photoeffekts 'ernst' genommen hatte, veröffentlichte daraufhin 1912 das '**Bohrsche Atommodell**'; in dem sich die Elektronen auf diskreten Bahnen um den Kern bewegen, und dann gelegentlich in tiefere Bahnen 'springen', unter Emission von Photonen, deren Wellenlängen exakt durch Gl. (4.1, 41a), bzw. deren Analoga  $R_H(1/3^2 - 1/n^2)$ ,  $n = 4, 5, \dots$ ;  $R_H(1/4^2 - 1/n^2)$ ,  $n = 5, 6, \dots$ ; usw. beschrieben werden.

Der (**Bahn**)-**Drehimpuls**  $L$  dieser Elektronen ist dabei quantisiert,  $|L| = n\hbar$ , mit der 'Hauptquantenzahl  $n$ ', deren wahre Bedeutung den Physikern erst nach der Formulierung der Quantenmechanik durch Heisenberg und Schrödinger, der Entdeckung des Eigendrehimpulses (Spin)  $|S| = 1/2 \hbar$  des Elektrons (s. Kap. 5) und der Einführung des 'Pauliprinzips' ganz bewusst wurde. Die (negative) Bindungsenergie  $E_n$  eines Elektrons im Wasserstoff auf der  $n$ -ten Bohrschen Bahn (mit Bahndrehimpuls  $L = n\hbar$ ) ist dann ( $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ ):

$$E_n = - 1/2 \times 1/n^2 m_e c^2 \alpha^2 = -1/2 \times 1/n^2 \times 27,2 \text{ eV}$$

und die '**Übergangsenergie**' eines Photons vom Zustand ' $m$ ' in den Zustand ' $n$ ' :

$$E_m - E_n = h\nu_{nm} = 13,6 \text{ eV} (1/n^2 - 1/m^2) \quad (4.2)$$



Zur 50. Wiederkehr der von **Niels Bohr** (1885 - 1962) im Jahr 1913 aufgestellten '**Quantenbedingungen**' für die **Photonenenergien  $h\nu$**  im Atom



Otto Stern 1888 - 1969



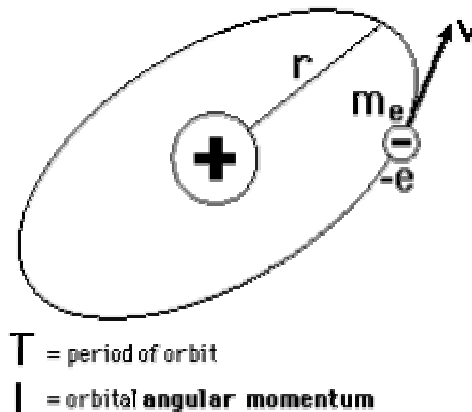
Walther Gerlach 1889 - 1979

Obwohl dieses Modell sehr erfolgreich war, blieben einige wesentliche Fragen offen, insbesondere die Dublettaufspaltung der Linien und die zusätzliche Linienaufspaltung im Magnetfeld (Zeemaneffekt). Der Durchbruch zur 'richtigen' Beschreibung des Wasserstoffatoms kam dann durch die Kombination von vier 'Essenzen':

1. **Dualismus** von Welle und Teilchen (de Broglie 1924).
2. **Quantenmechanik** in den Formen der 'Matrizenmechanik' Heisenbergs (1925) und der äquivalenten Wellenmechanik Schrödingers (1926 - 1927).
3. Entdeckung der Richtungsquantelung durch Stern und Gerlach (1922) und deren Deutung als Widerspiegelung des **halbzahligen Elektronenspins** durch Goudsmit und Uhlenbeck (1925).
4. **Paulis Ausschließungsprinzip** für Fermionen (Pauliprinzip 1925).

Wir verzichten hier auf eine Diskussion der Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms und befassen uns 'nur' mit dem epochemachenden Experiment von Otto Stern und Walther Gerlach und dessen weitestreichenden Konsequenzen. Stellt man sich im Bohrschen Atommodell -das später von Arnold Sommerfeld zu 'der' vor-quantenmechanischen Theorie ausgebaut wurde- dann ein Elektron mit dem Bahndrehimpuls  $|\mathbf{L}| = n\hbar$  vor, so kann die **Projektion**  $m = L_z$  von  $\mathbf{L}$  auf die 'Quantisierungsachse  $z$ ' nur die diskreten Werte  $\hbar n, \hbar(n-1), \dots, \hbar(-n+1), \hbar(-n)$  annehmen. Für ganzzahliges  $L$  muss es also immer eine **endliche, ungerade Anzahl** solcher Projektionszustände  $L_z$  geben (1 für  $n = 0$ , 3 für  $n = 1$ , 5 für  $n = 2, \dots$ ).

In der **klassischen** Theorie hingegen kann  $L_z$  bzw. das  $L_z$  zugeordnete 'magnetische Bahnmoment in  $z$ -Richtung' des Elektrons auf einer Kreisbahn in der  $x/y$ -Ebene mit Radius  $r$  und Geschwindigkeit  $v$ ,  $\mu_z = (\text{Strom}) \times (\text{Fläche}) = (ev/2\pi r) \times (\pi r^2) = e/2m L_z$  **jeden beliebigen Wert zwischen  $+|\mathbf{L}|$  und  $-|\mathbf{L}|$**  annehmen.



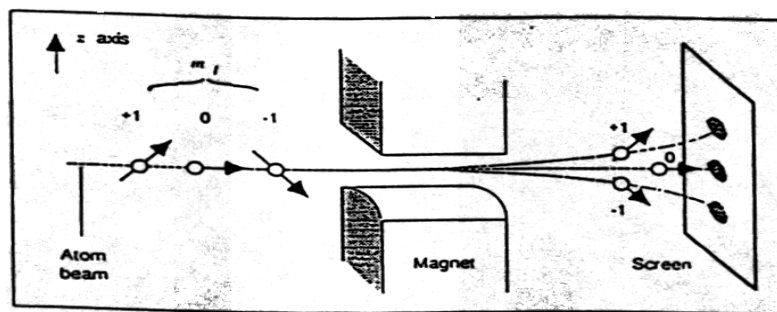
'Magnetisches Bahnmoment  $\mu'$  = Strom x Fläche  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  = Flächennormale):

$$\mu = ev/(2\pi r) \times (\pi r^2) \mathbf{n} = e/2m \mathbf{L} \quad (4.3)$$

Otto Stern und Walther Gerlach überlegten sich nun ein 'experimentum crucis', das entscheiden sollte, ob die klassische Theorie oder die 'neue' Vorstellung der quantisierten, diskreten  $L_z$ -Werte richtig ist. Ihre Überlegung war folgende:

In einem Magnetfeld  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{z}$  in  $z$ -Richtung ist die 'magnetische Energie' eines Elektrons  $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B_z = -e/2m L_z B_z$ . Ist  $B_z$  **inhomogen** ( $\partial/\partial z B_z \neq 0$ ), dann wirkt auf ein Elektron mit  $L_z$  eine **Kraft  $F_z \propto -L_z \partial/\partial z (B_z)$** . Sind die  $L_z$ -Werte **diskret**, dann führt dies -bei entsprechend großem Gradienten des Magnetfelds und entsprechend großer Flugstrecke des Elektrons durch das inhomogene Feld- zu einer **räumlichen Aufspaltung** der Flugbahnen und anschließenden **diskreten Spuren** auf einem geeigneten Schirm, deren Zahl  $n = 2 |L| + 1$  sein muss. Im 'klassischen' Fall dagegen, mit kontinuierlichen  $L_z$ -Werten, sollte sich **ein einziger homogener Fleck** ergeben.

Stern und Gerlach überlegten sich im Jahr 1922, dass ein Magnetfeld mit einem **Gradienten von ca. 1T/cm und einer Länge von einigen 10 cm** ausreichen sollte, die 'Flecken' zu trennen, falls der Bahndrehimpuls wirklich quantisiert sein sollte. Sie benutzten einen Silber-Atomstrahl mit der Annahme -gemäß der damaligen Theorie- dass dort 46 der insgesamt 47 Elektronen ihre Bahndrehimpulse zu  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  koppeln (abgeschlossene Schalen) und **ein 'Leuchtelektron' mit  $L = 1$**  übrig bleibt. Sie erwarteten daher **drei getrennte Flecken**, falls die Theorie des gequantelten Drehimpulses richtig sein sollte. Sie sahen aber **zwei diskrete Spuren!!**



Erwartung von **drei Flecken** für den Fall  $L = 1$  des Silberatoms.

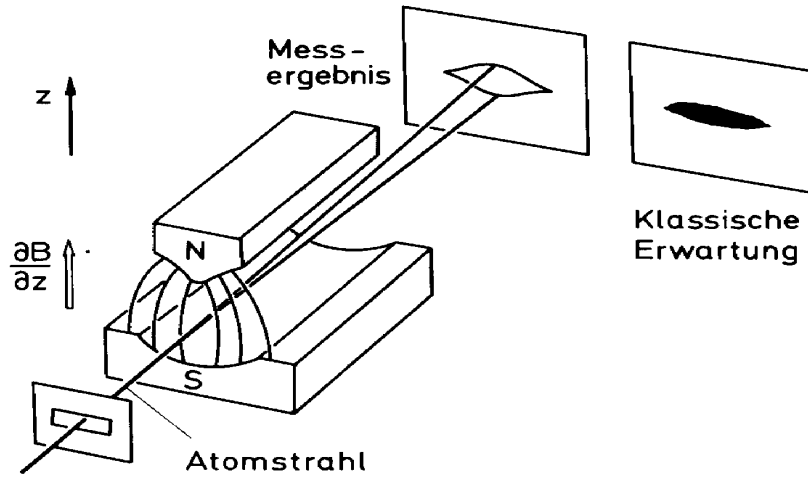


Abb. 1:  
Stern-Gerlach-Experiment. Ein Silberatomstrahl aus einem Ofen wird in einem inhomogenen Magnetfeld abgelenkt und in zwei Teilstrahlen aufgespalten

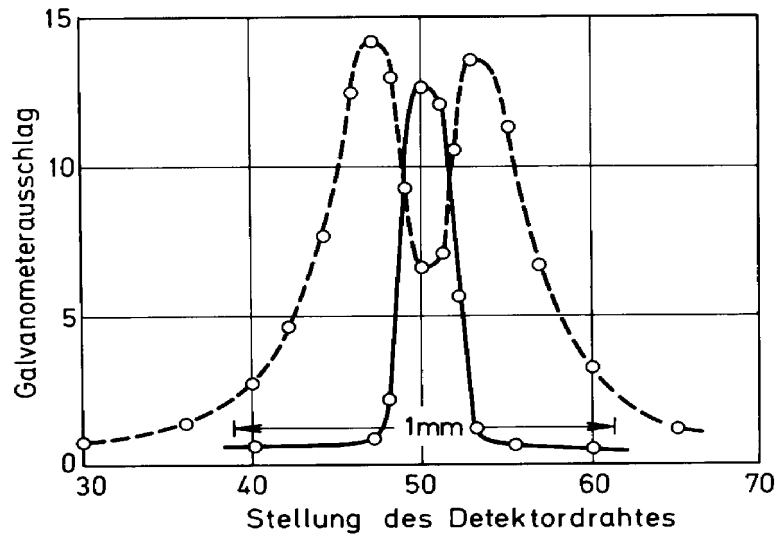


Abb. 2:  
Beobachtete Intensität des Silberatomstrahls als Funktion des Abstandes von der Strahlachse mit (gestrichelte Linie) und ohne (durchgezogene Linie) Magnetfeld

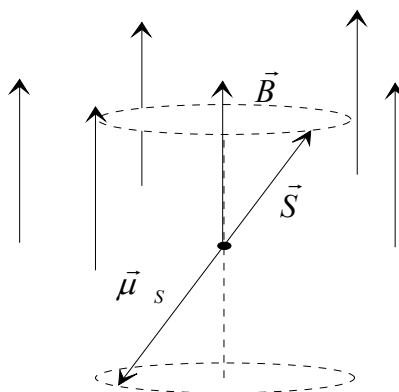
Abb. 2: Original-Ergebnis des Stern-Gerlach Experiments mit einem Silber-Atomstrahl. Die durchgezogene Spur (Mitte) ergab sich für  $B_z = 0$ ; die **beiden deutlich getrennten Linien** (Abstand der Maxima ca. 0,5 mm) ergaben sich für ein Magnetfeld mit einem Gradienten  $d/dz$  ( $B_z$ ) von etwa **1 T/cm** und einer Länge von ca. **60 cm**. Stern und Gerlach fanden also als Ergebnis nicht die von der klassischen Theorie vorhergesagte kontinuierliche Verteilung der Silberatome, sondern in spektakulärer Weise eine **Richtungsquantelung** -aber **nicht die** von der Theorie vorhergesagte **ungerade Zahl** von Linien! Was war falsch??

Aus heutiger Sicht weiß man, dass die Annahme  $L = 1$  für das Leuchtelektron im Silberatom **falsch** war; das siebenundvierzigste Elektron besetzt die 5s -Schale und hat daher  $L = 0$ . Dann hätte man aber **einen Fleck** erwarten müssen und nicht zwei!

Die Lösung des Rätsels kam im Jahr 1925 durch Goudsmit, Uhlenbeck und **Pauli**, der sein '**Ausschließungsprinzip**' für das Elektron in folgender Form formulierte:

1. es muss eine **vierte 'Quantenzahl'** für das Elektron geben außer seiner Energie (Hauptquantenzahl 'n' für ein im Atom gebundenes Elektron), seinem (Bahn)-Drehimpuls  $L$  und dessen Projektion  $L_z$ .
2. **kein** Elektron darf **dieselben Quantenzahlen wie ein anderes** haben.

Goudsmit und Uhlenbeck studierten in Leyden unter Paul Ehrenfest die 'Anomalien' der Feinstrukturspektren von Alkaliatomen. Paulis Hypothese einer 'vierten Quantenzahl' interpretierten sie als einen zusätzlichen Freiheitsgrad des Elektrons, nämlich als dessen quantisierte, **halbzahlige 'Eigenrotation'** (**Spin S**) mit den Eigenwerten  $S^2 = 3/4 \hbar^2$  und  $S_z = \pm 1/2 \hbar$ . Diesem zugeordnet ist dann ein magnetisches 'Spinmoment'  $\mu_s$  des Elektrons mit  $\mu_s = g e/(2m_e) S$  ('g-Faktor' = 2 in der 'klassischen' quantenmechanischen Theorie). Sie stellten diese Hypothese ohne jede Erwähnung des Experiments von Stern und Gerlach auf -obwohl sich damit deren Ergebnis ganz 'einfach' erklären ließ.





Wolfgang Pauli 1900 - 1958



Samuel Goudsmit 1902 - 1978



George Uhlenbeck 1900 - 1988

Paulis **Ausschließungsprinzip** gilt für **alle Fermionen -Teilchen mit halbzahligen Spin**, aber **nicht für Bosonen**. Dieses Theorem (das später in theoretischen Arbeiten über 'Spin und Statistik' halbwegs 'bewiesen' wurde) ist wahrscheinlich das **wichtigste Postulat der Physik des 20. Jahrhunderts**, da es erklärt, warum Atome so sind wie sie sind, und warum so etwas wie 'Chemie' überhaupt erst möglich wird und warum Photonen (Bosonen) im Laserstrahl sich so völlig anders verhalten wie Elektronen (Fermionen) im Atom. In mathematischem Gewand führt das **Pauliprinzip** in Verbindung mit dem Prinzip der **Ununterscheidbarkeit** der Teilchen zur **'Antisymmetrisierung'** der Wellenfunktion von Fermionen bzw. zur 'Symmetrisierung für Bosonen':

Beispiel: Zwei Elektronen (1,2) im niedrigsten Energiezustand eines Atoms ( $n = 1, L = 0, L_z = 0$ ); wenn sie die gleichen Quantenzahlen ( $n, L, L_z$ ) haben, dann müssen sie sich in der vierten Quantenzahl ( $S_z$ ) unterscheiden.

**Radialfunktion  $R_n$**  für beide Elektronen :  $R_1(1)$ , bzw.  $R_1(2)$

**Winkelfunktion  $Y_{LL_z}$**  für beide Elektronen:  $Y_{00}(1)$ , bzw.  $Y_{00}(2)$

Spineigenfunktionen  $s_1$  bzw.  $s_2 = |\alpha\rangle$  ( $s_z = + 1/2 \hbar$ ), bzw.  $|\beta\rangle$  ( $s_z = - 1/2 \hbar$ )

Wenn die vierte Quantenzahl ( $s_z$ ) **nicht** identisch sein darf, muss gelten:

Wenn Elektron 1 im Zustand  $|\alpha\rangle$  ist, muss Elektron 2 in  $|\beta\rangle$  sein und umgekehrt.



Der **Spin S** des **Gesamtsystems** der Elektronen muss dann die Form haben:  
 $S_z = s_z(1) + s_z(2) = 0$ ; ferner muss gelten:  $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = 0$ .

### Ansatz für die Gesamtwellenfunktion $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi &= R_1(1) R_1(2) Y_{00}(1) Y_{00}(2) \alpha(1) \beta(2) + R_1(2) R_1(1) Y_{00}(2) Y_{00}(1) \alpha(2) \beta(1) \\ &= R_1(1) R_1(2) Y_{00}(1) Y_{00}(2) [1/\sqrt{2} \{ \alpha(1) \beta(2) + \alpha(2) \beta(1) \}] \end{aligned}$$

die Funktion  $\mathbf{S}_s = 1/\sqrt{2} \{ \alpha(1) \beta(2) + \alpha(2) \beta(1) \}$  ist Eigenfunktion zu  $S_z = 0$ , aber  $\mathbf{S} = 1$ !

$\rightarrow \mathbf{S}_a = 1/\sqrt{2} \{ \alpha(1) \beta(2) - \alpha(2) \beta(1) \}$  ist zu nehmen ( $S_z = 0$ ,  $\mathbf{S} = 0$ )

( $\mathbf{S}_a$ , das **Spinsingulett**, ist **antisymmetrisch** bezüglich der Vertauschung  $1 \leftrightarrow 2$ )

Die 'richtige' Gesamtwellenfunktion ist dann:

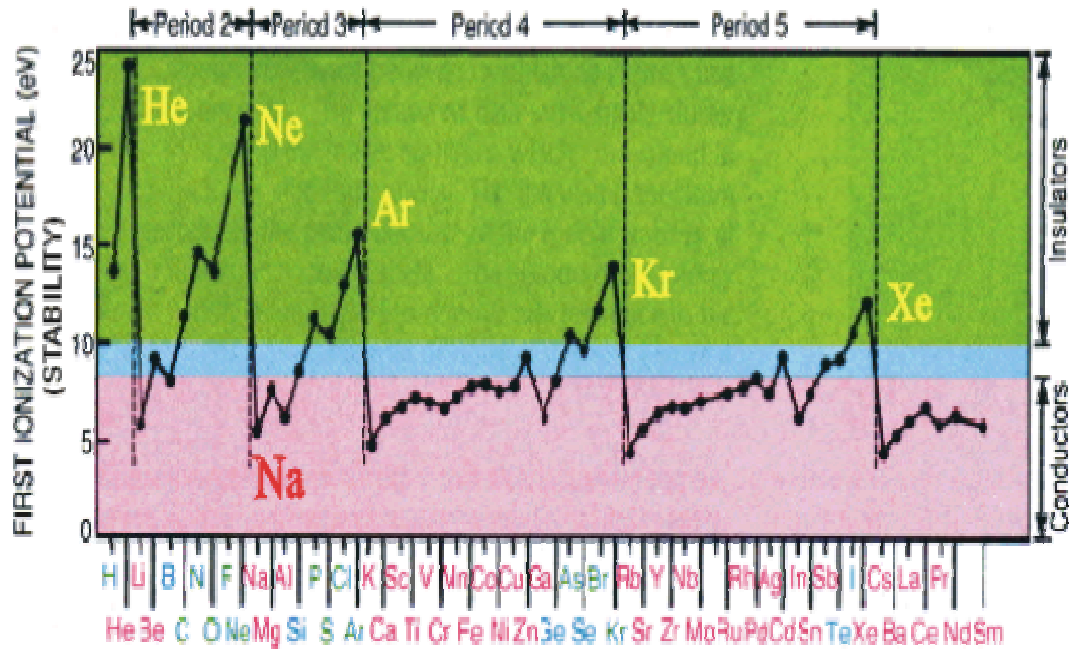
$$\psi(1,2) = R_1(1) R_1(2) Y_{00}(1) Y_{00}(2) 1/\sqrt{2} \{ \alpha(1) \beta(2) - \alpha(2) \beta(1) \} \quad (4.4)$$

Vertauscht man hier die Teilchen (1,2) dann geht  $\psi(1,2) \rightarrow -\psi(2,1)$

Ein drittes, viertes... Elektron in dieser Energieschale ist **nicht** 'erlaubt', da es mit einem der beiden Elektronen in allen vier Quantenzahlen (Freiheitsgraden) übereinstimmen würde, was aber für Teilchen mit halbzahligem Spin 'verboten' ist.

Als man nach Aufstellung der Schrödingergleichung (1926) noch die Bedeutung der **Hauptquantenzahl n** (diskrete Energieniveaus  $E_n$  mit  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) und die Einschränkung für den Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  ( $|L_{\max}| = (n - 1) \hbar$ ) erkannte und die 'Feinstruktur' (Kopplung von  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{S}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J}$ ) entdeckt hatte, ergab sich -unter Berücksichtigung des Pauliprinzip- **das Bauprinzip aller Atome, die 'Schalenstruktur'**:

n	L ( $\hbar$ )	$L_z$ ( $\hbar$ )	$S_z$ ( $1/2 \hbar$ )	Zahl	Gesamtzahl in n
1	0	0	+1, -1	2	<b>2</b>
2	0	0	+1, -1	2	<b>8</b>
	1	0, +1, -1	+1, -1	6	
3	0	0	+1, -1	2	<b>18</b> usw.
	1	0, +1, -1	+1, -1	6	
	2	0, +1, -1, +2	+1, -1	10	



Diese Schalenstruktur des Atomaufbaus zeigt sich am deutlichsten, wenn man das erste **Ionisationspotential** (Energie, um das erste Elektron aus einem neutralen Atom zu entfernen) gegen die **Elementnummer** (Kernladungszahl  $Z$ ) aufträgt. Gleichzeitig werden die chemischen Analogien der Elemente deutlich und die im Aufbau der Elektronenschalen liegenden Unterschiede von elektrischen Leitern (Metallen) und Nichtleitern. Was Meyer und Mendelejev in ihrem '**Periodensystem der Elemente**' noch intuitiv erahnt hatten, erhielt jetzt seine **mikroskopische Begründung**. Eine quantitative Beschreibung aller Elektronenzustände ergab sich dann unmittelbar später aus der **Schrödingerschen 'Wellengleichung'**, die ihrerseits auf den neuen Ideen von Max Born und Werner Heisenberg beruhte.



Max Born 1882 - 1970, um 1960



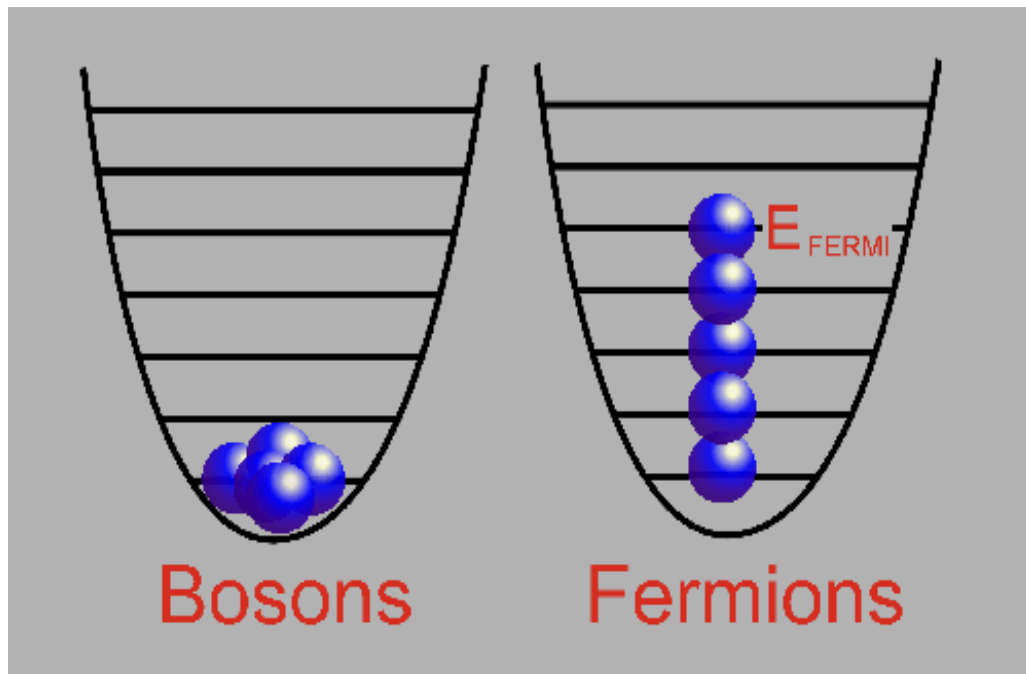
Erwin Schrödinger 1887 - 1961, um 1922



Werner Heisenberg 1901 - 1976, um 1921

Elektronen in Leitern, Halbleitern, Isolatoren oder Sternplasmen bezeichnet man als **'Fermigas'**. Diese Zustandsform ist wichtig für **alle 'Fermionen', d.h. Teilchen mit halbzahligem Spin**, und sie weist **dramatische Unterschiede** gegenüber der Zustandsform 'herkömmlicher' Materie auf. Das Fermigas spielt eine große Rolle in vielen Bereichen der Physik z.B. in der **Kernphysik** (Nukleonen im Atomkern), der **Festkörper- und Halbleiterphysik** (Leitungsband, Valenzband, Energielücke, Supraleitung der Elektronen...), der **Astrophysik** ('entartete' Elektronen in Weißen Zwergen, 'entartete' Neutronen in Neutronensternen...).

Quantenmechanisch verteilen sich **n Elementarteilchen**, die man in ein **Volumen  $V = d^3$**  'einsperrt' (anschaulich: unendlich hohe Potentialwand am Rande) auf **diskrete Energieniveaus**, deren **Abstand** mit abnehmender Länge  $d$  -und das heißt **mit zunehmender Teilchendichte  $\rho$  zunimmt**. Jetzt gibt es einen fundamentalen Unterschied zwischen **Bosonen**, Teilchen mit **ganzzahligem Spin**, und **Fermionen**, Teilchen mit **halbzahligem Spin**, auf der anderen Seite: Während **beliebig viele Bosonen** in einen Energiezustand gehen können, sind es für **Fermionen** wegen des Pauliprinzips nur exakt  **$2S + 1$**  ( $S = \text{Spin}$ ; für  $S = 1/2$  also 2, für  $S = 3/2 = 4...$ )



Verteilung von **Bosonen** bzw. **Fermionen** auf die diskreten Energieniveaus im Potential eines harmonischen Oszillators (ohne Spinnmultiplizität)

Dies bedeutet aber, dass bei gleicher Teilchenzahl  $n$  und gleichem Volumen  $V$ , also **bei gleicher Teilchenzahldichte, die mittlere Energie von Fermionen** (erheblich) **größer als die von Bosonen ist**.

Für ein Fermion, das sich mit dem Impuls  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  im Volumen  $V = d^3$  bewegt, gilt nach der Unschärferelation:

$$p_x d \geq \hbar; p_y d \geq \hbar; p_z d \geq \hbar \rightarrow p^2 \equiv p_F^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \geq 3 \hbar^2/d^2$$

$$\rightarrow p_F = \sqrt{3} \hbar/d \quad (p_F = \text{'Fermi-Impuls'}) \quad (4.5)$$

Dies lässt sich mit einem qualitativ gleichen Ergebnis anschaulich auch so formulieren:

$$p^3 d^3 = p^3 V \geq \hbar^3 \quad (4.6)$$

das heißt: der 'Phasenraum'  $p^3 V$  eines Fermions muss immer  $\geq \hbar^3$  sein, oder, andersherum: in der Phasenraum-Einheitszelle  $\hbar^3$  darf sich höchstens ein Fermion aufhalten (mit Berücksichtigung des Spins  $S$  dürfen es  $2S + 1$  sein, also z.B. für  $S = 1/2 = 2$ ).

Führt man die Teilchendichte  $\rho_n = 1/d^3 = \text{Zahl der Fermionen/cm}^3$  ein, folgt aus Gl.4.5:

$$p^3/\rho_n \geq \hbar^3, \quad \text{bzw. } \rho_n < p^3/\hbar^3 \quad (4.7)$$

→ bei gegebenem Impuls  $p$  (d.h. kinetischer Energie) kann die Dichte eines Fermionensystems nicht beliebig groß werden

Diese Bedingung führt zur 'Fermistatistik', der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(E,T)$  der Energien  $E$  eines Fermionensystems (man vergleiche dies mit der Statistik für Bosonen (Photonen), Gl. 2.1!) bei der Temperatur  $T$ :

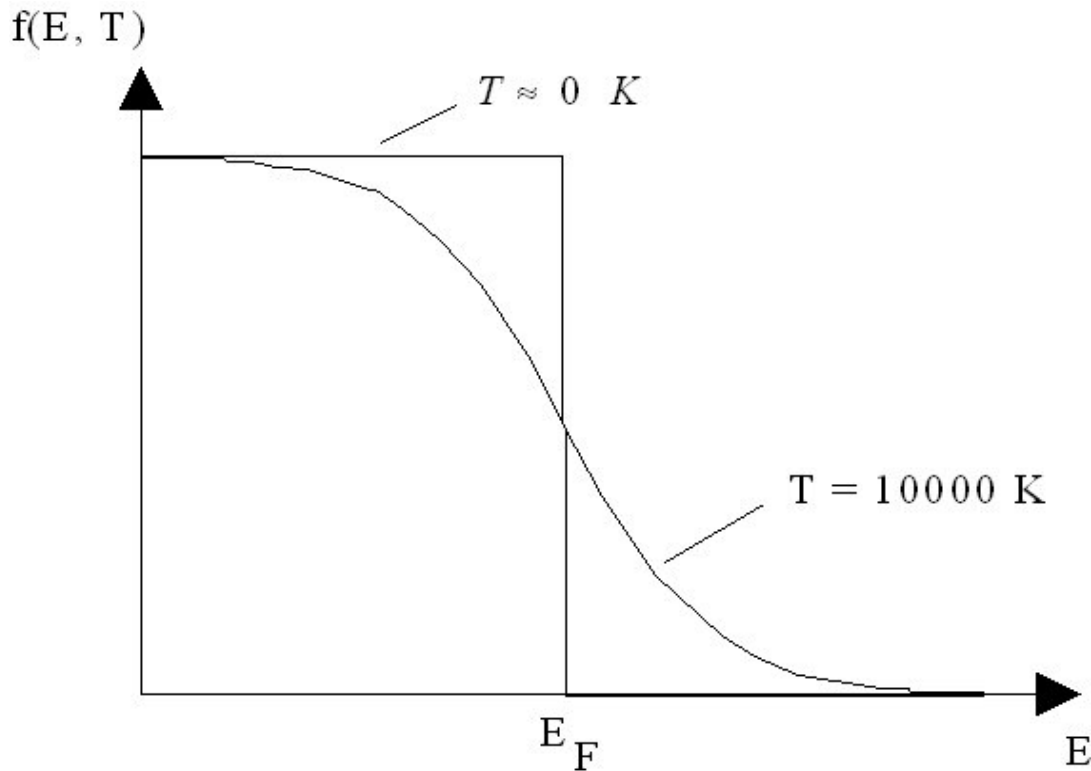
$$f(E,T) \propto \{\exp[(E - E_F)/kT] + 1\}^{-1} \quad (4.8)$$

mit der 'Fermienergie'  $E_F$ :

$$\begin{aligned} E_F &\approx p_F^2/2m = 3\hbar^2/(2md^2) = 3\hbar^2/2m & \rho_n^{2/3} & \quad (E_F \ll mc^2, \text{ nichtrelativistisch}) \\ E_F &\approx p_F c = \sqrt{3} \hbar c/d = \sqrt{3} \hbar c & \rho_n^{1/3} & \quad (E_F \gg mc^2, \text{ relativistisch}) \end{aligned}$$

$E_F$  ergibt sich auch aus der Bedingung  $f(E_F, T) = 1/2$

## Fermiverteilung $f(E, T)$



Die Folge ist nun die: Wird  $E_F > kT$  (bzw.  $> 3/2 kT$ , die **mittlere** thermische Energie) dann verhält sich ein **Gas nicht mehr gemäß der idealen Gasgleichung**

$$pV = R T \quad \text{bzw.} \quad p = \rho / (\langle \mu \rangle m_H) kT \quad (4.9)$$

mit  $\rho =$  Dichte [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ]  $\langle \mu \rangle m_H =$  mittlere Atommasse in [ $\text{g}$ ] (z.B. für ein Proton-Elektron-Plasma =  $0,5 \times 1,6 \times 10^{-24} \text{ g}$ ),  $k =$  Boltzmann-Konstante =  $1,38 \times 10^{-16} [(\text{gcm}^2)/(\text{s}^2\text{K})]$

vielmehr muss man in der Gasgleichung die **'thermische Energie'  $kT$  durch die Fermienergie  $E_F$  ersetzen**. Man nennt das **Gas dann 'entartet'**. Dies hat dramatische Konsequenzen: Die **ideale Gasgleichung** garantiert nämlich eine wunderbare **'Selbstregulierung'** von Druck, Temperatur und Dichte z.B. im Innern eines Sterns: wird die Temperatur  $T$  größer (z.B. durch eine plötzlich ansteigende Fusionsrate), nimmt der Gasdruck  $p$  zu, das Gas expandiert, kühlt sich dabei ab, wird wieder komprimiert unter Temperaturzunahme ....Dieser Vorgang schwingt solange hin und her, bis sich **ein neues stabiles Gleichgewicht** eingestellt hat. Ein **entartetes Gas** hingegen reagiert **nicht mehr 'selbstregulierend'** auf eine **Änderung der Temperatur oder des Drucks**, da **Druck und Temperatur nicht mehr durch die ideale Gasgleichung verknüpft** sind! Dies führt zu dramatischen Effekten in 'Weißen Zwergen' (entartete Elektronen) bzw. 'Neutronensternen' (entartete Nukleonen).

## Beispiel:

Ist das **Elektronengas** im Zentrum **der Sonne entartet**? Ist also  $E_F(e^-) > 3/2 kT$  ?

$$1. T(r=0) = 1,5 \times 10^7 \text{ K}$$

$$\rightarrow 3/2 kT = 3/2 \times 1,38 \times 10^{-16} [\text{erg/K}] \times 1,5 \times 10^7 \text{ K} = 3,1 \times 10^{-9} \text{ erg} = \mathbf{1,94 \text{ keV}}$$

Dichte ( $r=0$ ) =  $150 \text{ g/cm}^3 \rightarrow$  Protonenzahl/cm<sup>3</sup> = Elektronenzahl/cm<sup>3</sup> =  $\rho_n(0)$ :

$$\rho_n(0) = 150 \times 6,02 \times 10^{23} = 9 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$$

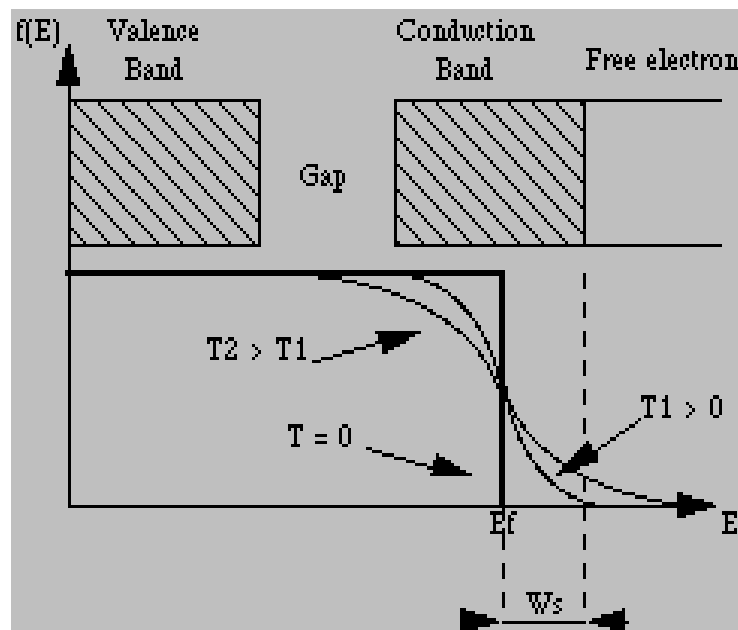
$$\rightarrow d = \rho_n^{-1/3} = 2,2 \times 10^{-9} \text{ cm} = \mathbf{2,2 \times 10^4 \text{ fm}}$$

$$2. E_F(e^-, \text{ nichtrelativ.}) = p_F^2/2m_e = 3\hbar^2/(2m_e d^2) = 3\hbar^2 c^2/(2m_e c^2 d^2) = \mathbf{0,236 \text{ keV}}$$

$\rightarrow E_F(e^-) \approx 0,1 \times 3/2 kT \rightarrow$  **Elektronen sind nicht entartet**  
(Entartung würde eintreten ab  $d \approx 0,77 \times 10^4 \text{ fm}$ )

$$\rightarrow \rho_n(\text{Ent., } e^-) \approx 23 \times \rho_n(0) = 2 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$$

Dies entspräche bei gleicher Protonen- und Elektronenzahl einer **Massendichte des Wasserstoffs im Zentrum der Sonne von  $3,45 \text{ kg/cm}^3$**



**Fermiverteilung** von Elektronen in einem (Halb) Leiter