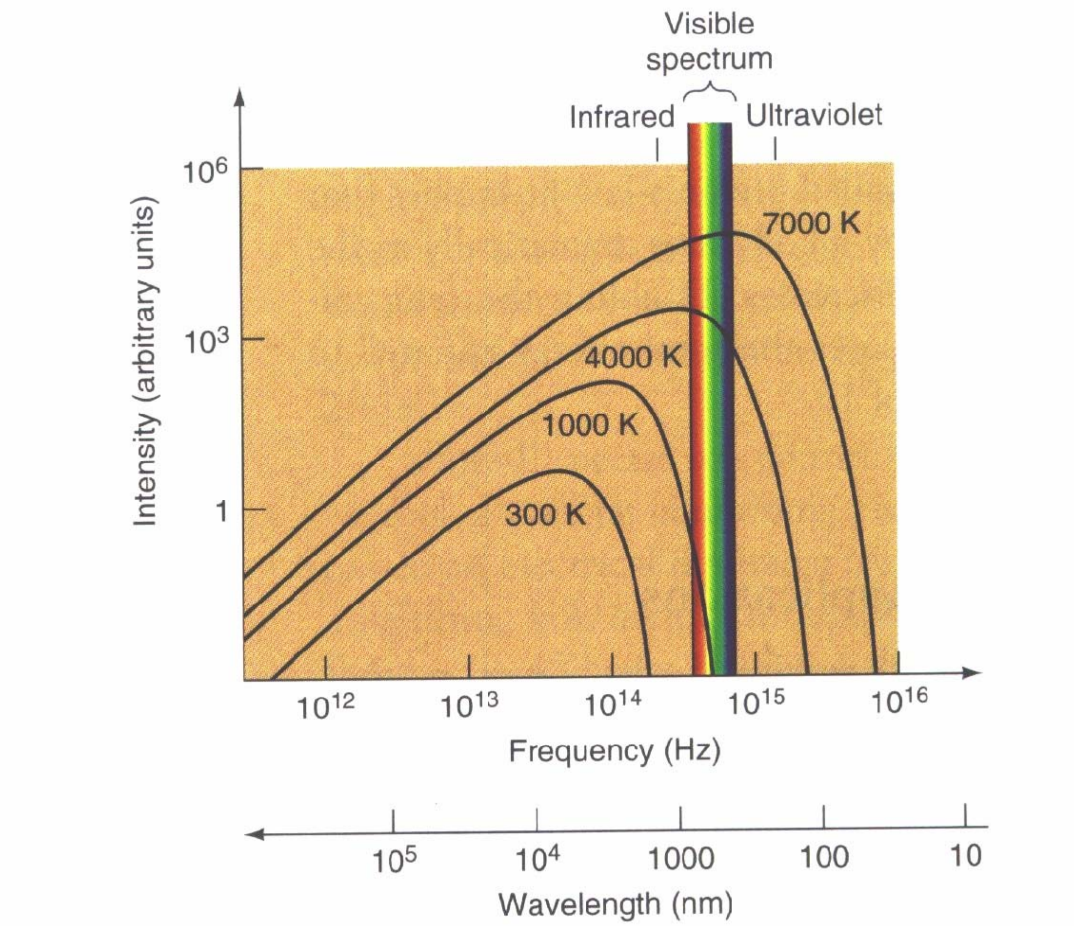
# 2. Max Planck und das Wirkungsquantum h

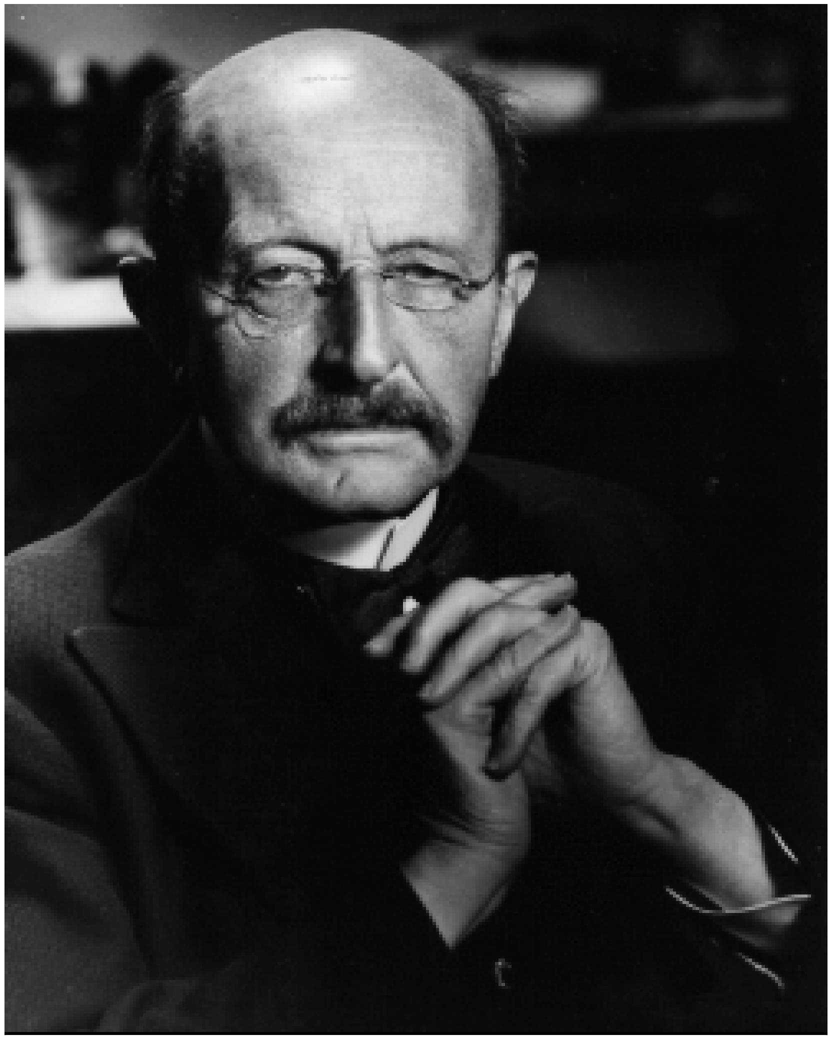



Frequenzverteilung eines **schwarzen Strahlers**

Am 6. Dezember 1900, dem 'Geburtsdatum' der modernen Physik, hatte Max Planck endlich die Antwort auf eine Frage gefunden, vor der die Physiker viele Jahrzehnte kapituliert hatten: Wie teilt sich im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer Temperatur T die Strahlung eines Hohlraums ('schwarzer Körper') auf die Frequenzen $\nu$ auf ? Planck konnte eine Lösung aber nur finden unter der Annahme, dass **Energie nur in diskreten 'Portionen'** abgegeben oder aufgenommen werden kann. Die Notwendigkeit eines elementaren 'Wirkungsquantums h' [ Energie x Zeit] ' ergab sich aus den Bedingungen:

1. die Zahl der Frequenzen zwischen $\nu$ und $(\nu + d\nu)$ soll $\propto \nu^2 d\nu$ sein

2. die mittlere Energie <E> eines harmonischen Oszillators im thermodynamischen Gleichgewicht (Emission = Absorption; die emittierenden Atome stellt man sich als harmonische Oszillatoren vor) muss sein: $< E > = kT$



Max Planck 1858 - 1947

Diese Bedingungen konnten nur erfüllt werden, wenn sich die **Energie E eines Photons** der Frequenz $\nu$ als $E = h\nu$ schreiben lässt, mit $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s, und die **Frequenzen $\nu$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung** (sie wurde später 'Bose-Einstein-Verteilung' 'getauft'):

$$W(\nu) = 1/ \{ \exp(h\nu/kT) - 1 \} \qquad (2.1)$$

haben. Daraus folgt dann für die Verteilungsfunktion der Frequenzen $B_\nu$ (T) bei einer Temperatur T pro Flächeneinheit $[B_\nu(T)\, d\nu] = [B_\lambda(T)\, d\lambda] = [\mathrm{erg\ s^{-1}\ cm^{-2}}]$:

$$B_\nu (T)\, d\nu = \underbrace{2/c^2}_{\text{Norm}} \times \underbrace{h\nu}_{\text{Energie}} \times \underbrace{1/ \{ \exp [h\nu/kT] - 1\}}_{\text{Wahrscheinlichkeit}} \times \underbrace{\nu^2\, d\nu}_{\text{Zahl der Zustände}} \qquad (2.2)$$

Wegen $\lambda = c/\nu$ und $d\lambda/d\nu = - c/\nu^2$ ergibt sich entsprechend für die Wellenlängen $\lambda$:

$$B_\lambda (T)\ d\lambda = 2\ hc^2 /\lambda^5 \ \ x\ \ \{\exp [hc/ (k\lambda T)] - 1 \}^{-1}\ d\lambda \qquad (2.3)$$

Für $E = h\nu << kT \rightarrow B_\nu (T) \propto \nu^2 \ x\ \ kT \ \propto\ E^2 \ x\ kT$ (Rayleigh-Jeans)

$E = h\nu >> kT \rightarrow B_\nu (T) \propto \nu^3 \ x\ \ \exp [- h\nu/kT] \propto E^3 \ x \ \exp [-E/kT]$ (Wien)

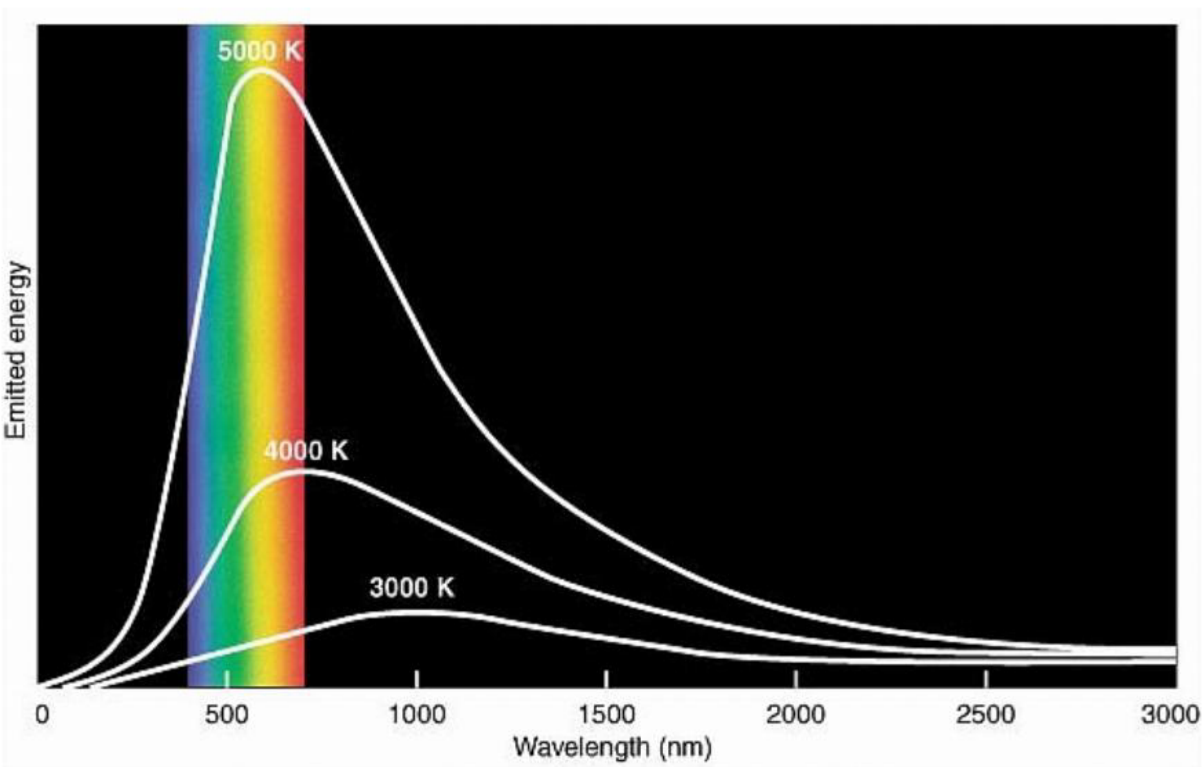
Die fundamentale Bedeutung der Planckschen Strahlungsformel besteht darin, dass es ihr gelingt , die bisher getrennten Grenzfälle $E << kT$ bzw. $E >> kT$ aus einer einzigen Formel abzuleiten, die überdies für alle Energien $E = h\ \nu$ und alle Temperaturen $T$ gültig ist.

Die über den **gesamten Frequenzbereich** $\nu$ emittierte Leistung pro Flächeneinheit, $\Phi$ [erg/(s cm²) ≡ $10^{-7}$ W/cm²], ergibt sich aus der Integration zu:

$$\Phi \ [erg/(s\ cm^2)] = \int B_\nu(T) d\nu = 2h/c^2 \int \nu^3 \{\exp[h\nu/kT] - 1\}^{-1} d\nu = \sigma\ T^4 \qquad (2.4)$$

mit der Stefan-Boltzmannschen 'Strahlungskonstanten' $\sigma$:

$$\sigma \ = (2\pi^5 k^4)/ (15c^2 h^3) = 5{,}67 \ x\ 10^{-5}\ [erg/(s\ cm^2\ K^4)] = \mathbf{5{,}67\ x\ 10^{-12}\ [W/(cm^2\ K^4)]}$$




Abgestrahlte Energie über der Wellenlänge für verschiedene Temperaturen

Die gesamte von der Sonne (Stern) mit dem Radius R abgestrahlte Leistung L ist demnach, isotrope Abstrahlung vorausgesetzt:

$$L = 4\pi \; R^2 \; \Phi = 4\pi \, R^2 \; \sigma \; T^4 \qquad (2.5)$$

Dieses 'Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz' ist eine der fundamentalsten und **wichtigsten Beziehungen der Thermodynamik und Astrophysik.** Es erlaubt, wenn zwei der drei Größen (L, R, T) bekannt sind, die jeweils dritte auszurechnen.

## Beispiel Sonne:

R = 7 x $10^{10}$ cm; L (aus der Solarkonstanten) = 3,8 x $10^{26}$ W: → T = 5860 K

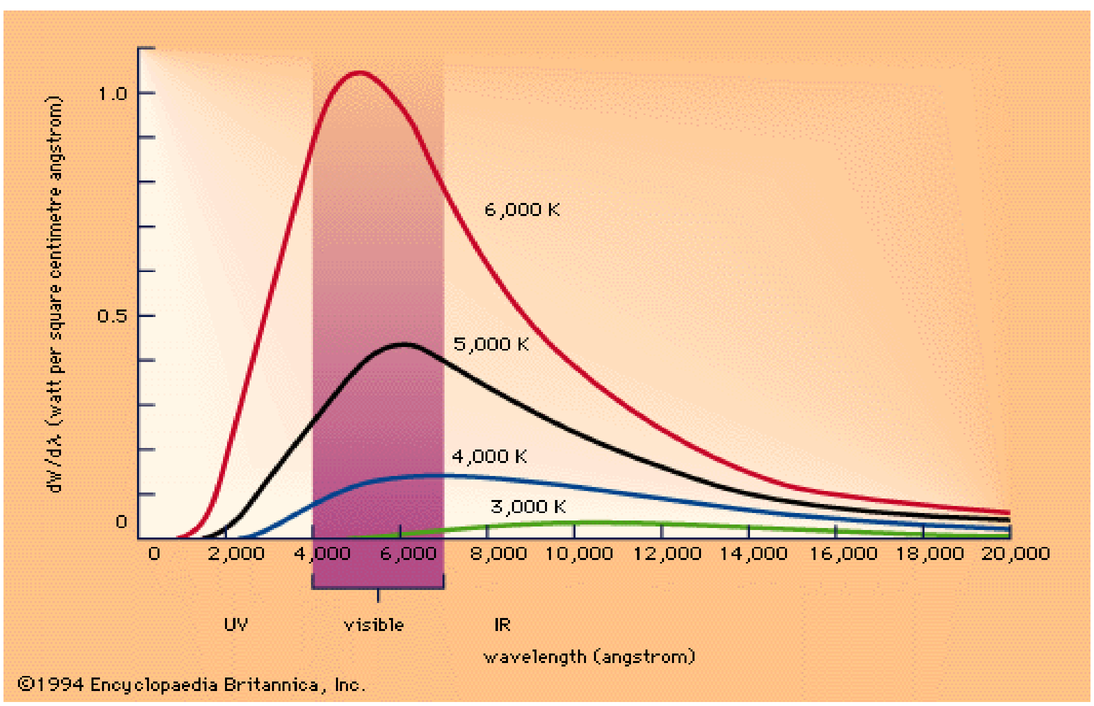
Dieselbe Temperatur erhält man, wenn man die **Wellenlänge** $\lambda_{Max}$ der maximalen Emission bestimmt, durch Differenzieren von Gl. 2.3:

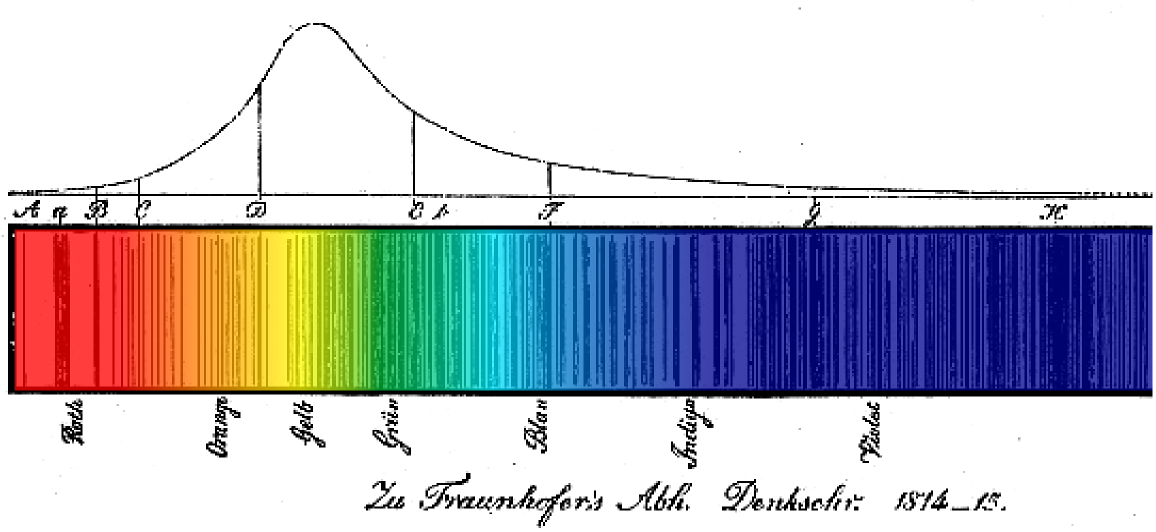
$$d/d\lambda \; B_\lambda = 0 \quad \rightarrow \lambda_{Max} \, T = 0{,}29 \; [\text{cm K}] \qquad (2.6)$$

(Wiensches Verschiebungsgesetz)

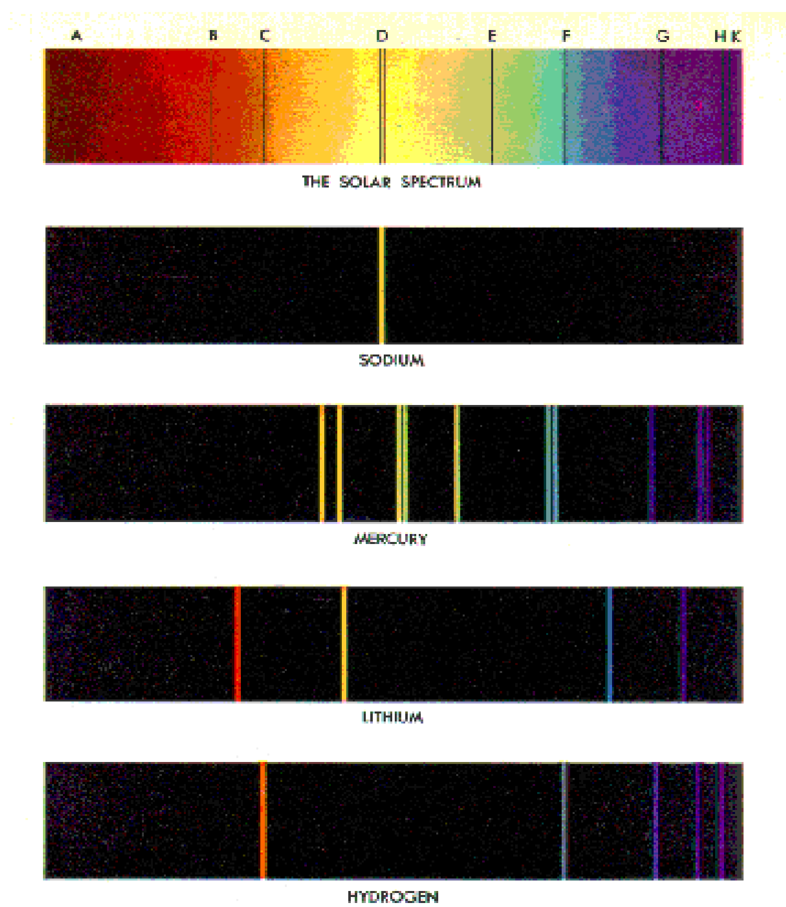
und mit dem experimentellen $\lambda_{Max}$ = 4,95 x $10^{-5}$ cm → T(Sonne) = 5860 K

Die **differentielle Emission** $dW/d\lambda$ [Watt / ($cm^2$ x $10^{-8}$ cm)] ($dW \equiv d\Phi$ in unserer Nomenklatur) für die **Sonne** ( T ≈ 6000 K) bzw. andere Temperaturen T als Funktion der Wellenlänge λ ist nochmals im folgenden Bild dargestellt:

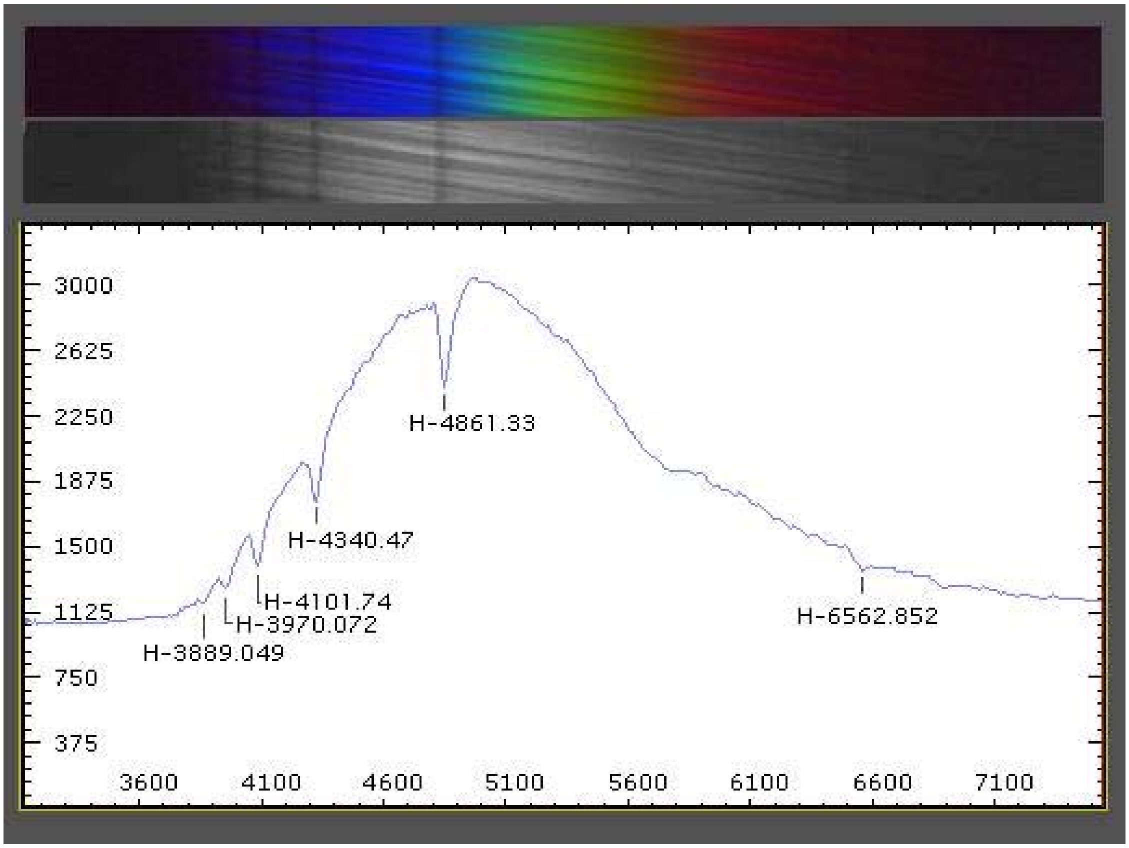





Absorptionslinien der Sonne und Intensitätsverteilung (oben) aus einer der ersten Arbeiten von Fraunhofer




Sonnenspektrum (oben) mit Absorptionslinien von Natrium (D) und Wasserstoff, im Vergleich mit Eichlinien einiger Elemente




Spektrum des Sirius über der Wellenlänge [in A = $10^{-8}$ cm] mit einer Reihe von Wasserstoff (H) -Absorptionslinien aus der Balmer-Serie.
Quelle: www.regulusastro.com/regulus

## Was ist nun das revolutionär Neue an Plancks Theorie?

1. Die Energie E von Photonen kann nur in 'diskreten Portionen', charakterisiert durch die neue Naturkonstante $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ [J s], abgegeben oder aufgenommen werden. Planck selbst betrachtete dies lange Zeit nur als 'Arbeitshypothese', die bei einem tieferen Verständnis der Dinge wieder aufgegeben werden könnte. Erst Einstein machte in seiner Deutung des Photoeffekts (s. Kapitel 3) damit ernst. An diese Einführung der 'Energiequanten' schlossen sich jahrzehntelange Diskussionen an, ob die Energieabgabe bzw. Energieaufnahme nur in der Absorption (bzw. Emission) 'diskret' erfolgt, oder aber in beiden Prozessen, wie wir es heute annehmen.

2. Die Energie eines Photons ist proportional zu seiner Frequenz, $E = h\,\nu$. Dies steht in völligem Gegensatz zur klassischen Theorie, in der die Energie einer Welle proportional zum Quadrat ihrer Amplitude ist (z.B. Wasserwelle), aber rein gar nichts mit ihrer Schwingungsfrequenz zu tun hat. Die Verknüpfung von Energie und Frequenz ist ein erster, aber fundamentaler Schritt in die Richtung des Teilchen-Welle-Dualismus, der eine der Grundlagen der modernen Physik werden sollte.

## Zum weiteren Studium:

Informieren Sie sich z.B. im Internet (Google etc.) über **die drei wichtigsten Verteilungsfunktionen f(E) für die Energie** (Maxwell, Bose-Einstein, Fermi) und Beispiele, sowie über Sternspektren, das Stefan-Boltzmann-Gesetz und die 3K Hintergrundstrahlung, z.B.:

**f(E):**

(www.google.de → Maxwell-, Bose-Einstein-, Fermi distribution
→ Bilder → Maxwell-, Bose-Einstein-, Fermi distrib.)

Beispiele:

Maxwell: $f(E) = [A \exp(E/kT)]^{-1}$ Verteilung der kinetischen Energie von Molekülen
(**unterscheidbare**, 'klassische' Teilchen)

Bose-Einstein : $f(E) = [A \exp(E/kT) - 1]^{-1}$ identische Teilchen mit ganzzahligem Spin
(nicht unterscheidbare, 'quantenmechanische' Teilchen)

Fermi : $f(E) = [A \exp(E/kT) + 1]^{-1}$ identische Teilchen mit halbzahligem Spin
(nicht unterscheidbare, 'quantenmechanische' Teilchen)

### Strahlung eines Schwarzen Körpers:

(www.google.de → blackbody radiation
→ Bilder → blackbody radiation)

### Sternspektren

(www.google.de → stars Harvard classification
→ Bilder → Hertzsprung Russell diagram)

### 3 K Hintergrundstrahlung

(www.google.de → Bilder → COBE
→ cosmic microwave background
→ cosmology standard model
→ cosmology radiation decoupling)