Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 15**	08.04.2008

[Abgabe 15.04 *vor* der Vorlesung]

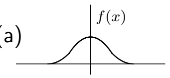
Aufgabe 45: Integral ist Fläche (1+1+1+1+1+1+1+2=9 Punkte)

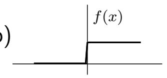
Elementare Umformungen (z.B. Verschieben, Skalieren, Potenzreihenentwicklung) und geometrisch–anschauliche Überlegungen (z.B. gerade/ungerade) reichen aus, um die Werte der folgenden acht Integrale zu ergründen. [„Hauptsatz“ hier verboten (und unrentabel)]

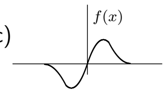
$$J_1 = \int_0^4 dx \left(5 - 3\,|x-2| \right)$$
$$J_2 = \int_0^3 dx \left[1 + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} \right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) \right]$$
$$J_3 = \int_{-3}^4 dx \; \frac{2x - \sin^2(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}$$
$$J_4 = \int_0^6 dx \left(\frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4x+5} \right)$$
$$J_5 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{15\,\varepsilon} dx \; \frac{x\,\cosh(x) - \sinh(x)}{\varepsilon\, x^3}$$
$$J_6 = \lim_{a\to\infty} \int_a^{a+2} dx \left(x\,\sqrt{4+x^2} - x^2 \right)$$
$$J_7 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\varepsilon} dx \; \frac{2}{x\,\varepsilon^2} \left(\cosh(2x) - \sqrt{1 + 2\sqrt{6\,x\,\sinh(x) - 6x^2}} \right)$$
$$J_8 = -\beta\,\partial_\beta \ln\left(\int_0^\infty dx \; \frac{x}{e^{\beta x}+1} \right)$$

Aufgabe 46: Stammfunktionen malen (1+1+1=3 Punkte)

Skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ je eine Stammfunktion $F(x)$:
[Hinweis: Stammfunktion ist diejenige Funktion $F(x)$, welche $F'(x) = f(x)$ erfüllt.]

(a) 

(b) 

(c) 

- Bitte heften Sie – falls Sie uns nicht schon vom WS07/08 bekannt sind – einen Zettel mit Name, Vorname, Matr-Nr. und Studienfach an, den wir abreißen und behalten dürfen.
- Auf der Bearbeitung selbst vermerken Sie bitte – auch künftig – oben rechts Ihren Namen, sowie das Kürzel Ihres Tutors (SB,DB,DR,MS,DK), bzw (V) bei Abholung in der Vorlesung.
- Es sind alle Aufgaben zu lösen, und zwar allein.
- Klausur am Montag, dem 21. 7. 2008.
- Homepage der Vorlesung ist http://www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp2

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 16**	15.04.2008

[Abgabe 22.04 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 47: Stammfunktionen finden (1+1+1=3 Punkte)

Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen per „Kandidaten-Methode“:

(a) $\frac{1}{x^n} = \partial_x [\;\;?\;\;]$ [für $n \neq 1$]

(b) $\frac{2\,\cos(x)}{(3+\sin(x))^{1/3}} = \partial_x [\;\;?\;\;]$

(c) $x\,\sin(x) = \partial_x [\;\;?\;\;]$

Aufgabe 48: Existenz von Integralen (1+1+1=3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale *existieren*. [Auswertung also nicht nötig]

(a) $\int_1^\infty dx \; \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(b) $\int_0^1 dx \; \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(c) $\int_0^\pi dx \; \frac{1}{1-\cos(x)}$

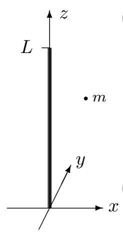
Aufgabe 49: Dünner Stab in 1D (2 Punkte)

Ein (unendlich dünner) Stab liegt auf der x–Achse und erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = L$. Er wird zum Ende hin immer schwerer: seine (lineare) Massendichte beträgt $\sigma(x) = x\,\sigma_0$, mit konstantem σ_0. Berechnen Sie seine Gesamtmasse M und die Schwerpunktskoordinate R_1.

Aufgabe 50: Äquipotential–Linien (1 Punkt)

In zwei Dimensionen (2D) hat ein Potential seine Äquipotential–*Linien* (also Linien in der xy–Ebene, auf denen das Potential seinen Wert nicht ändert). Welche Form haben jene von $V(\vec{r}) = e^{-3\arctan\left(9y^2/a^2+5+x^2/a^2\right)}$?

Aufgabe 51: Gravitationspotential eines Stabes (2.5+1.5=4 Punkte)



(a) Welches gewöhnliche Integral liefert das Potential $V(\vec{r})$ der Kraft, die auf eine Probemasse m in der Umgebung eines Stabes wirkt? Der Stab erstrecke sich auf der z–Achse von 0 bis L, sei unendlich dünn, und habe konstante lineare Massendichte σ. [nützliche Variable: $x^2 + y^2 =: \rho^2$.] $V(\vec{r}) = \,?$
[Hier ist nun zur Auswertung des Integrals der „Hauptsatz“erlaubt. Wenn Sie eine Integraltabelle benutzen, zitieren und testen (ableiten) nicht vergessen.]

(b) Lassen wir die Länge L anwachsen, so sollte das im WS bei Aufgabe 37 angegebene $V(\vec{r}) = \gamma\, m\, \sigma \ln\left(\sqrt{z^2+\rho^2} - z\right)$ entstehen. Ist es so? (begründen!) Dieses Grenzfall–V hat sehr einfache Äquipotentialflächen (jene Flächen, auf denen V überall den gleichen Wert hat), nämlich welche?

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 17**	22.04.2008

[Abgabe 29.04 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 52: Partialbruchzerlegung (1+1+1=3 Punkte)

Werten Sie die folgenden Integrale durch Partialbruchzerlegung des Integranden aus.

(a) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1+x+x^2}{x^2+x^3} = \,?$

(b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{4x}{1-x^4} = \,?$

(c) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1-2x-x^2}{1+x+x^2+x^3} = \,?$

Aufgabe 53: partielle Integration (1+1+1=3 Punkte)

Werten Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration aus.

(a) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x\, \cos(x) = \,?$

(b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2\, e^{-x} = \,?$ [Hier muss zweimal partiell integriert werden.]

(c) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \sin^2(x) = \,?$

Aufgabe 54: Substitution (1+0.5+1.5=3 Punkte)

Werten Sie die folgenden Integrale durch Substitution aus.

(a) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \,?$ [$x = \sin(y)$ könnte helfen]

(b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \cos(x)\, \sin^2(x) = \,?$ [$u = \sin(x)$ könnte helfen]

(c) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sin(x)} = \,?$ [$t = \tan(x/2)$ könnte helfen]

Aufgabe 55: Schwingungsdauern T (1+1+1.5+1.5=5 Punkte)

Für eine Schwingung in einem geradem Potential (also $V(-x) = V(x)$) mit rechtem Umkehrpunkt a gilt für die Schwingungsdauer $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^a dx\, \frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$.

Vorweg: zu gegebenem $V(x)$ und a ist natürlich die Energie $E = \,?$

(a) Test. Zum 1D Oszillator ist $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ und es muß unbedingt $T = 2\pi/\omega$ herauskommen. Wie geht es dabei zu?

(b) Auch zu $V(x) = \beta\,|x|/a$ können wir unsere Integrierkunst testen. $T = \,?$

(c) $V(x) = \beta\, \ln(|x|/a)$. Wie substituieren wir hier? Geht $x = e^{\cdot\cdot}$?: $T = \,?$ [$\int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$]

(d) Und hier? Die Erde sei $\approx$punktförmig und auf der N–S–Achse (x–Achse) durchbohrt. Ein kosmisches Teilchen (m) schwingt in $(-a, a)$ ständig hindurch: $T = \,?$

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 17**	Lösung

Aufgabe 52:

(a) Int $= \int_a^b dx\, \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right) = \left[-\frac{1}{x} + \ln(1+x)\right]\Big|_{x=a}^b$

(b) Int $= \int_a^b dx\, \left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\right) = \left[\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)\right]\Big|_{x=a}^b$

(c) Int $= \int_a^b dx\, \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2}\right) = \left[\ln(1+x) - \ln(1+x^2)\right]\Big|_{x=a}^b$

Aufgabe 53:

(a) lese Integrand als $u'v$ mit $u' = \cos(x)$, $v = x$; $u = \sin(x)$

Int $= [\,x\, \sin(x)\,]\big|_{x=a}^b - \int_a^b dx\, \sin(x) = [\,x\, \sin(x) + \cos(x)\,]\big|_{x=a}^b$

(b) lese Integrand als $u'v$ mit $u' = e^{-x}$, $v = x^2$; $u = -e^{-x}$

Int $= [\,x^2(-e^{-x})\,]\big|_{x=a}^b - \int_a^b dx\, 2x(-e^{-x})$

nochmal, mit $v = 2x$

Int $= [\,x^2(-e^{-x}) + 2x(-e^{-x})\,]\big|_{x=a}^b - \int_a^b dx\, 2(-e^{-x}) = [\,-(x^2+2x+2)e^{-x}\,]\big|_{x=a}^b$

(c) lese Integrand als $u'v$ mit $u' = \sin(x)$, $v = \sin(x)$; $u = -\cos(x)$

Int $= [\,-sc\,]\big|_{x=a}^b + \int_a^b dx\, c^2 = [\,-sc\,]\big|_{x=a}^b + \int_a^b dx\, (1-s^2) = [\,-sc + x\,]\big|_{x=a}^b - \int_a^b dx\, s^2$

nun den letzten Term auf die linke Seite der Glg bringen (und durch 2 teilen)

Int $= \left[\,\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))\,\right]\Big|_{x=a}^b$

Aufgabe 54:

(a) Subst $x = \sin(y)$; $dx = dy\, \cos(y)$; setze $A = \arcsin(a)$, $B = \arcsin(b)$

Int $= \int_A^B dy \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-sin^2(y)}} = \int_A^B dy = [\,y\,]\big|_{y=A}^B = [\,\arcsin(x)\,]\big|_{x=a}^b$

(b) Subst $u = \sin(x)$; $du = dx\, \cos(x)$; setze $A = \sin(a)$, $B = \sin(b)$

Int $= \int_A^B du\, u^2 = [\frac{1}{3}\, u^3]\big|_{y=A}^B = \left[\,\frac{1}{3}\, \sin^3(x)\,\right]\Big|_{x=a}^b$

(c) Subst $t = \tan(x/2)$; $dt = dx \frac{1}{2\cos^2(x/2)} = dx \frac{c^2+s^2}{2c^2} = dx \frac{1+t^2}{2} \;\Leftrightarrow\; dx = dt \frac{2}{1+t^2}$

und (s. Vorl) $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2sc}{c^2+s^2} = \frac{2t}{1+t^2}$; setze $A = \tan(a/2)$, $B = \tan(b/2)$

Int $= \int_a^b \frac{dx}{\sin(x)} = \int_A^B \frac{dt}{t} = [\,\ln|t|\,]\big|_{t=A}^B = [\,\ln|\tan(x/2)|\,]\big|_{x=a}^b$

Aufgabe 55:

vorweg: $E = V(a)$

(a) $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\sqrt{a^2-x^2}} \overset{x\to ax}{=} \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$

letzter Schritt: z.B. Subst $x = \sin(y)$, $dx = dy\cos(y)$; Int $= \int_0^{\pi/2} dy \frac{c}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^{\pi/2} dy = \frac{\pi}{2}$

oder z.B. Int $= \int_0^1 dx\, \partial_x \arcsin(x) = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0$

(b) $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\beta}\sqrt{1-x/a}} \overset{x\to ax}{=} 4\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{a}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{8ma^2}{\beta}} \int_0^1 dx\, \partial_x \left[-2\sqrt{1-x}\,\right] = \sqrt{\frac{32ma^2}{\beta}}$

(c) $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{a}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(x)}} = \sqrt{\frac{8\pi ma^2}{\beta}}$

letzter Schritt: z.B. Subst $x = e^{-y^2}$, $dx = -2y\, dy\, e^{-y^2}$; Int $= 2\int_0^\infty dy\, e^{-y^2} = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(d) $V = -\frac{\gamma m M_e}{|x|}$; $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma m M_e}} \int_0^1 dx\, \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 a^3}{\gamma M_{\mathrm{Erde}}}}$

letzter Schritt: Int$= -\int_0^1 dx\, \partial_x\left[\sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)\right] = -\frac{1}{2}\arctan(-\infty) + \frac{1}{2}\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

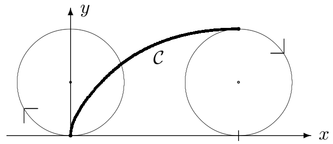
oder z.B. per [Bronstein, 1.1.3.4.39]: $\int_0^1 dx\, x^\alpha(1-x)^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$, bei $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ und mit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi/2}$, $\Gamma(2) = 1$

oder z.B. per Subst $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $dy = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = dx\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\frac{(1+y^2)^2}{-2}$; Int $= 2\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \int_0^\infty dy\, \partial_y\left[\arctan(y) + \frac{y}{1+y^2}\right] = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

Übungen zu EMTP II — Blatt Nr. 18 — 29.04.2008

[Abgabe 06.05 *vor* der Vorlesung ; am 01.05. finden *keine* Übungen statt]

Aufgabe 56: Zykloide (2+1+1+1=5 Punkte)



Die skizzierte Bahn $\mathcal{C}$ wird vom Randpunkt eines Rades (R) durchlaufen, das die x–Achse entlang rollt. Weil $\mathcal{C}$ bei jeder Winkelgeschwindigkeit des Rades entsteht, dürfen wir diese konstant $=: \omega$ setzen. $\vec{r}(t) = R \cdot (\ ?\ ,\ ?\ )$

Bei Teil (a) bis (d) empfiehlt sich $\omega t =: \tau$ als Parameter der Kurve, und natürlich $\sin(\tau) =: s$ etc.

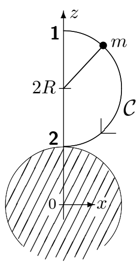
(a) Welche Länge L hat das Kurvenstück $\mathcal{C}$? (Bronstein sagt $L = 4R$. Ob das stimmt?)

(b) Wenn eine Masse m mit viel Schwung ab Ursprung entlang $\mathcal{C}$ die Höhe $2R$ erreicht, nimmt ihre kinetische Energie ab: das System mußte Arbeit verrichten. Wie wertet sich das Arbeit–Kurvenintegral A längs $\mathcal{C}$ explizit aus? [Hier ist $R \ll R_{\rm Erde}$.]

(c) Welche Fläche F liegt im Intervall $(\,0\,,\pi R\,)$ unter der Kurve $\mathcal{C}$?

(d) Ob es sich bei $\mathcal{C}$ etwa um die Bahn einer Ladung (m,q) in den Feldern $\vec{E} = (0,E,0)$, $\vec{B} = (0,0,B)$ handelt? Prüfen Sie direkt nach, ob $\vec{r}(t)$ Newtons Bewegungsgleichung löst. Welche Winkelgeschwindigkeit ω und welchen Radius R hat also „das zugehörige Rad“?
[Newton? Felder? Am Anfang vom Kapitel 3 ...]

Aufgabe 57: Schiffschaukel — und $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{K}$ (3 Punkte)



Schützenfest. Der Kahn (m , punktförmig) wird zunächst langsam auf einem Kreis (R) von $(0,0,R)$ nach Punkt 1 bei $(0,0,3R)$ gefahren. Und dort gehts nun los. Keine Reibung, das Gestänge ist masselos.

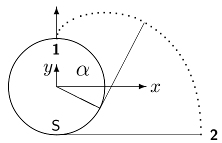
Rechnen Sie die (positive) Arbeit A, welche die Gravitationskraft am System bis zum Erreichen des Fußpunktes 2 verrichtet, explizit als Kurvenintegral aus. Vorab notieren Sie natürlich, was dabei herauszukommen hat.

Aufgabe 58: Kurvenintegrale (1+1+2=4 Punkte)

(a) Der $\sin(x)$ bildet zwischen 0 und π einen Torbogen (Skizze!). Wie lang mag er sein ?
[Integral angeben genügt; Auswertung schwierig (Tabelle: elliptisch..).]

(b) Ein Draht mit homogen verteilter Masse M wurde zu einem Viertelkreis (Radius a) gebogen. Masse/Länge $\sigma = ?$ Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R} = ?$ Ist wirklich $|\vec{R}\,| < a$ herausgekommen ?

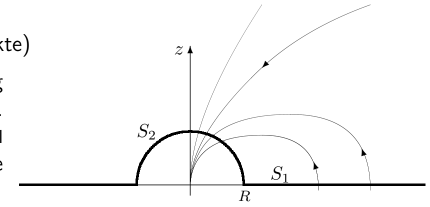
(c) Welche Länge L hat der punktierte Weg, den ein Stein zurücklegt, welcher an einem um die Erde (R) gewickelten Faden hängt, am Nordpol (Punkt **1**) hochgeworfen wird und schließlich die skizzierte Horizontale bei **2** erreicht ? [Guter Parameter ist der Winkel α zwischen y–Achse und Fadenablösepunkt: $\vec{r}(\alpha) = .\,.\,. + .\,.\,. = ?$]



Übungen zu EMTP II — Blatt Nr. 19 — 06.05.2008

[Abgabe 13.05 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 59: Strom I durch Fläche (2+2=4 Punkte)



Überall in der oberen Atmosphäre möge Ladung fließen, mit Stromdichte $\vec{\jmath} = \alpha(r^2\vec{e}_3 - 3z\vec{r})/r^5$. Weil sich dabei nirgends Ladung anhäuft [später: weil „$\nabla\cdot\vec{\jmath} \equiv 0$“], sollte der Strom I_S durch die gesamte Fläche $S = S_1 + S_2$ schlicht Null sein.

(a) Rechnen Sie zuerst den Anteil I_1 durch die R–Kreis–gelochte (und ansonsten unendliche) xy–Ebene aus (per Flächenintegral, „außen“ ist oben).

(b) Werten Sie den Anteil I_2 durch die R–Halbkugel–Oberfläche S_2 („außen“ ist außen) explizit als Oberflächenintegral aus. [günstig: Polarkoordinaten $\vec{r}(\rho,\varphi) = (\rho\, c,\ \rho\, s,\ \sqrt{R^2-\rho^2}\,)$]

Aufgabe 60: Flächenintegral (2+1+1+2=6 Punkte)

Die Erde (Radius R) ist eine Scheibe und liegt in der xy–Ebene (Zentrum = Ursprung). Ihre Masse M ist homogen verteilt, d.h. die konstante Masse/Fläche der Scheibe ist $\sigma = ?$ Eine Raumsonde (m) bei $\vec{r}$ spürt den negativen Gradienten des Potentials V der Scheibe.

(a) Schreiben Sie $V(\vec{r})$ als ebenes Flächenintegral auf, und zwar in Polarkoordinaten. [Vorsicht, davon gibt's 2 Sorten: ρ' und φ' grasen die Scheibe ab, $\vec{r} = (\,\rho\cos(\varphi)\,,\ \rho\sin(\varphi)\,,\ z\,)$ positionieren die Sonde.]

(b) Aus Symmetriegründen kann V kann nicht von φ abhängen. Auch das bei (a) notierte Doppelintegral sollte diese Unabhängigkeit zeigen. Wie gelingt das ?

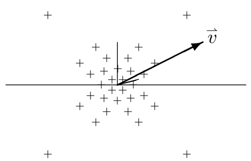
(c) Anschaulich ist auch klar, auf welchen asymptotisch führenden Term $V_\infty = ?$ sich V bei $r \to \infty$ reduzieren muß. Folgt auch dies aus Ihrem $\iint$ von (a) ?

(d) Bleibt die Sonde auf der z–Achse, so sind die Integrale für $V(0,0,z)$ ausführbar. Welcher Term bleibt übrig (V–Konstante weglassen!), wenn z so klein wird, daß man gegen 1 kein $O(z^2/R^2)$ mehr wahrnehmen kann ?

[Bei Integrand $\sqrt{1-\mathrm{trig}(x)}$ ist oft Substitution $\mathrm{trig}(x) = u$ einen Versuch wert (trig = eine der trigonometrischen Fktn).]

Aufgabe 61: Meteorologie per Integral (2+2+1=5 Punkte)

Gewitterwolke. Nach Blitzschlag fliegt eine positiv geladene Wolke mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (\,v_1\,,\ 0\,,\ v_3\,)$ nach rechts–oben weiter ($v_3 > 0$). Ladungs– und Stromdichte erfüllen den Raum: $\rho(\vec{r},t) = \left(b/\sqrt{\pi a^2}\right)^3 \exp\left[\,-(\vec{r}-\vec{v}t)^2/a^2\,\right]$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}$.



(a) Welche Dimensionen haben die Konstanten a und b ? Welche Gesamtladung $Q = \int\!\mathrm{d}x\int\!\mathrm{d}y\int\!\mathrm{d}z\,\rho$ hängt zur Zeit $t = 0$ im Raum ? [Per Verschiebetrick wird klar, daß auch zu jeder späteren Zeit diese Gesamtladung Q vorliegt; Nützliches Integral (s. Skript S.67): $\int\! dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$]

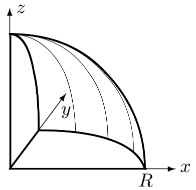
(b) Welcher Strom $I(t)$ — als ebenes Flächenintegral auszuwerten — fließt durch die Ebene $z = 0$?

(c) Das Felder–Paar $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t)$ muß $\partial_t\rho + \partial_x j_1 + \partial_y j_2 + \partial_z j_3 = 0$ (die sog. *Kontinuitätsgleichung*) erfüllen. Ist es so? [beim Ableiten nach t ist $\vec{r}$ fest, beim Ableiten nach x sind t, y, z fest usw.]

Übungen zu EMTP II **Blatt Nr. 20** 13.05.2008

[Abgabe 20.05. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 62: Volumenintegral, Kugelkoord. (1+2=3 Punkte)



Das skizzierte Achtel (Masse M) einer Kugel (R) wurde aus einem homogenem Material hergestellt.
(a) Berechnen Sie das Volumen V in Kugelkoordinaten. Welche Massendichte ρ hat die Achtelkugel folglich?
(b) Wo liegt der Schwerpunkt $(R_1 = ?\,, R_2 = ?\,, R_3 = ?)$ des Körpers ? [Richtig, jedes dieser drei Volumenintegrale müßte zum gleichen Resultat führen. Trotzdem ausführen, weil es sich mit dem Ziel vor Augen so schön rechnet.]

Aufgabe 63: Kugelförmige Sterne: $\rho(r)$ (1+1+2=4 Punkte)

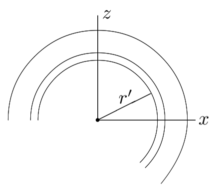
Aus der Vorlesung kennen Sie das Gravitationspotential für eine kugelförmige Massenverteilung, $V(r) = -\gamma\, m\, \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr'\, r'\, \rho(r') \left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right)$.

(a) Schreiben Sie $V(r)$ ohne Wurzeln/Beträge, d.h. als $V(r) = -\gamma\, m\, 4\pi \left(\frac{1}{r} \int_0^r \ldots + \int_r^\infty \ldots \right)$

(b) Unterstellt man der Erde konstante Dichte, so daß $\rho(r' \le R) \approx \rho_0$, $\rho(r' > R) = 0$ ist, und begibt sich in ihr Inneres ($r < R$), so folgt aus (a) der dortige Potentialverlauf $V_{\text{innen}}(r) = ?$

(c) Die Ursache–Antwort–Beziehung in (a) läßt sich angeblich nach der Ursache $\rho(r)$ auflösen, indem man den Operator $\Delta_r := \frac{1}{r}\, \partial_r^2\, r$ auf $V(r)$ anwendet. Stimmt's? $\Delta_r V(r) = ?$

Aufgabe 64: Superposition (3 Punkte)



Stellen Sie sich die Erde (E) aus Kugelschalen aufgebaut vor.

Das Potential einer Kugelschale (KS; Radius R) der Masse M besteht aus zwei Teilen und lautet (Skizze!)

$$V_{\text{KS}}(r<R) = -\gamma m M/R \;\;,\;\; V_{\text{KS}}(r>R) = -\gamma m M/r \;.$$

Schneiden wir nun aus der Erde (Radius R_{E}, konstante Massendichte ρ) die Schale zwischen r' und $r' + dr'$ heraus (Volumen? Masse?), so geht deren Potential dV aus V_{KS} per Ersetzung $M \to ?$, $R \to ?$ hervor. Addition dieser dV's, für $R_{\text{E}} < r$, muß $-\gamma m M_{\text{E}}/r$ geben. Ist es so? Und aus Addition der dV's für $r < R_{\text{E}}$ folgt $V_{\text{innen}}(r) = ?$ [s.63(b)]

Aufgabe 65: Trompete (1+1+1+1=4 Punkte)

Betrachten Sie den Rotationskörper, der sich bei Rotation der Kurve $f(x) = \frac{1}{x}$ um die x–Achse ergibt, wobei $1 \le x \le \infty$ ist ("unendlich lange Trompete"). Dieser Rotationskörper hat einige verblüffende Eigenschaften:
(a) Berechnen Sie die Schnittfläche mit der x-y Ebene.
(b) Berechnen Sie die Gesamtoberfläche.
(c) Berechnen Sie das Gesamtvolumen.
(d) Wieviel Farbe bräuchte man, um die Trompete zu füllen? Und wieviel Farbe, um ihre Oberfläche bzw die x-y-Schnittfläche anzustreichen? Macht das Sinn?! Diskutieren Sie dieses paradoxe Ergebnis. [Hinweis: Google / Wikipedia → "Gabriel's horn" oder "Torricelli's trumpet"]

Übungen zu EMTP II **Blatt Nr. 20** Lösung

Aufgabe 62:

(a) $V = \int_0^R dr\, r^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot 1 = \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^R \cdot \left[-\cos(\vartheta)\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3}{6} \quad \Rightarrow \rho = \frac{6M}{\pi R^3}$

(b) allg.: $\vec{R} = \int_0^R dr\, r^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{1}{M}\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}$, wobei $\frac{1}{M}\, \rho(\vec{r}) = \frac{6}{\pi R^3}$ hier $\vec{r}$-unabhängig

$R_3 = \frac{6}{\pi R^3} \int_0^R dr\, r^3 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \int_0^{\pi/2} d\varphi \overset{(1)}{=} \frac{6}{\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} R$

$R_1 = \frac{6}{\pi R^3} \int_0^R dr\, r^3 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin^2(\vartheta) \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \cos(\varphi) \overset{(2)}{=} \frac{6}{\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8} R$

$R_2 = \frac{6}{\pi R^3} \int_0^R dr\, r^3 \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin^2(\vartheta) \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \sin(\varphi) \overset{(2)}{=} \frac{6}{\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8} R$

benutzte Stammfunktionen sind (1) $sc = \partial_\vartheta[\frac{1}{2} s^2]$ und (2) $s^2 = \partial_\vartheta[\frac{1}{2}(\vartheta - cs)]$ (oder: trig$^2 \to \frac{1}{2}$)

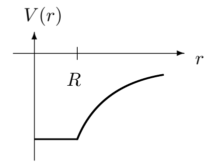
Aufgabe 63:

(a) $\sqrt{\;}-\sqrt{\;} = |r+r'|-|r-r'| = \begin{cases} r < r' : \; 2r \\ r > r' : \; 2r' \end{cases} \quad \Rightarrow V(r) = -\gamma m\, 4\pi \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr'\, r' \rho(r') \right)$

(b) $V_{\text{innen}} = -\gamma m\, 4\pi \rho_0 \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr'\, r'^2 + \int_r^R dr'\, r' \right) = \gamma m\, 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^2}{6} - \frac{R^2}{2} \right)$

(c) $\frac{1}{r} \partial_r \partial_r \left(-\gamma m\, 4\pi\right) \left(\frac{1}{r} \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr'\, r' \rho(r') \right) = -\gamma m\, 4\pi \frac{1}{r} \partial_r \int_r^\infty dr'\, r' \rho(r') = \gamma m\, 4\pi \rho(r)$

Aufgabe 64:



Kugelschale: Vol. $= \frac{4\pi}{3} \left((r' + dr')^3 - r'^3 \right) = 4\pi\, dr'\, r'^2 + \mathcal{O}(dr'^2)$

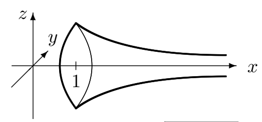
Masse $= \rho \cdot$Vol.

$dV = \{ M \to \rho \cdot \text{Vol.}\,,\; R \to r' \} = -\gamma m \rho\, 4\pi\, dr'\, r'^2 \begin{cases} 1/r' \text{ (für } r < r') \\ 1/r \;\text{ (für } r > r') \end{cases}$

also ist $V(r > R_E) = \int_0^{R_E} dr' \left(-\gamma m \rho\, 4\pi\right) r'^2\, \frac{1}{r} = -\gamma m \rho\, 4\pi \cdot \frac{1}{3} R_E^3 \cdot \frac{1}{r} = -\gamma m M_E / r$

und $V_{\text{innen}}(r) = V(r < R_E) = -\gamma m \rho\, 4\pi \left(\int_0^r dr'\, \frac{r'^2}{r} + \int_r^{R_E} dr'\, \frac{r'^2}{r'} \right) = \gamma m \rho\, 4\pi \left(\frac{r^2}{6} - \frac{R_E^2}{2} \right)$

Aufgabe 65:



(a) $S_{xy} = 2 \int_1^\infty dx\, \frac{1}{x} = 2 \left[\ln(x)\right]_1^\infty = \infty$

(b) z.B. $\vec{r} = \vec{r}(x, \varphi) = \left(x, \frac{1}{x}\sin(\varphi), \frac{1}{x}\cos(\varphi) \right)$

$\vec{df} = dx\, d\varphi\, \left(1, -\frac{s}{x^2}, -\frac{c}{x^2}\right) \times \left(0, \frac{c}{x}, \frac{s}{x}\right) = dx\, d\varphi\, \left(\frac{1}{x^3}, \frac{s}{x}, \frac{c}{x}\right) \quad , \quad df = |\vec{df}| = dx\, d\varphi\, \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^2}}$

$S = \int_S df = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^\infty dx\, \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^2}} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dx}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 2\pi \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \pi S_{xy} = \infty$

(c) $V = \int_1^\infty dx\, \pi \frac{1}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \pi$

(d) Volumen endlich, Schnitt- und Oberfläche unendlich?! Ja. Farbe? Dimensionen! [s. z.B. Wiki]

Zusatzmaterial zu EMTP II 19.05.2008

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

δ–Darstellungen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\,\varepsilon} \quad \text{für } -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\; \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\; \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\; \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk\; \mathrm{e}^{ikx} \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ mit $F := \int dx\; g(x)$

Stufenfunktion θ: $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x \Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) = \delta(x)\text{–Darst.}$

$$\theta(x) = 1 - \theta(-x) \;\;,\;\; \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x) - 1$$

δ–Formeln: $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\Big)$

allgemein: $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\, \delta(x-x_n)$, x_n sind die Nullstellen von f

$\frac{1}{i} \int_0^\infty dk\; \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, $\mathcal{P}$ für *Principal value* (Hauptwert)

$$\int dx\; f(x)\, \delta'(x) = -f'(0) \quad , \quad -x\,\delta'(x) = \delta(x) \quad , \quad \int dx\; \delta(x-a)\, \delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

δ–Physik:

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r},t) = q\;\delta\Big(\vec{r} - \vec{r}_0(t)\Big)$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\;\, q\;\delta\Big(\vec{r} - \vec{r}_0(t)\Big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\, \delta(\varrho - R)\, \delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\, \delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

Sei L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$. Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle", d.h. das Hilfsproblem $L\,G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion" $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\; f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\begin{aligned} \int da\; f(a)\, L\, G(x,a) \;&=\; \int da\; f(a)\, \delta(x-a) \\ L \int da\; f(a)\, G(x,a) \;&=\; f((x) \quad \curvearrowright \quad y(x) = \int da\; f(a)\, G(x,a) \quad . \end{aligned}$$

Übungen zu EMTP II **Blatt Nr. 21** 20.05.2008

[Abgabe 27.05. *vor* der Vorlesung ; am 22.05. finden *keine* Übungen statt]

Aufgabe 66: Neun mal Delta (0.5+0.5+1+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5=5 Punkte)

(a) $\delta(x) = \alpha\;[\,\delta(x+\varepsilon) + \delta(x-\varepsilon)\,]$, $\alpha = ?$

(b) $\delta(x) = \beta\; e^{-|x|/\varepsilon}$, $\beta = ?$

(c) Welche Darstellung der Stufenfunktion $\theta(x)$ läßt sich aus $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$ basteln? Welche $\delta(x)$–Darstellung folgt (per ∂_x) daraus?

(d) Über welche definierende Eigenschaft (einen Positions–Parameter a und ein f enthaltend) sollte $\delta'(x)$ festgelegt werden ?

(e) $\delta(x-\varepsilon) - \delta(x+\varepsilon) = \gamma\,\delta'(x)$, $\gamma = ?$

(f) 2D , $r =$ Polarkoordinate : $\delta(\vec{r}) = \kappa\,\delta(r-\varepsilon)$, $\kappa = ?$

(g) 3D , $r =$ Kugelkoordinate : $\delta(\vec{r}) = \lambda\,\delta(r-\varepsilon)$, $\lambda = ?$

(h) 3D , $\rho =$ Zylinderkoordinate : $\delta(\vec{r}) = \tau\,\delta(z)\,\delta(\rho-\varepsilon)$, $\tau = ?$

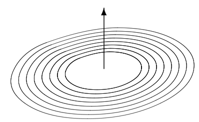
(i) „Kraftstoß" zur Zeit $t_0 > 0$: $\boxed{m\dot{v} = p_0\,\delta(t-t_0) \;\;,\;\; v(0) = v_0}$ $v(t) = ?$

Aufgabe 67: Der Saturnring ist ein Draht und die Erde eine Scheibe (2+2+1=5 Punkte)

(a) Welche 3D Massendichte $\rho(\vec{r})$ hat ein Kreis–Draht $(M,\, R)$, der in der xy–Ebene liegt ? Der Versuch, in Zylinderkoordinaten $(\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\; \rho' = \sqrt{x'^2+y'^2}\,)$ sein Gravitationspotential $V(\vec{r})$ auszurechnen, bleibt bei einem gewöhnlichen Integral hängen, welchem ? Aber auf der Symmetrieachse wird es einfach: $V_{\text{draht}}(0,0,z) = ?$

(b) Zu einer dünnen Kreisscheibe (R, in xy–Ebene) mit homogen verteilter Masse M interessiere von vornherein nur $V_{\text{sch}}(0,0,z) = ?$ [Vorsicht: $\sqrt{a^2} = |a|$. Zu Ihrer Kontrolle : natürlich sollte V bei $z \to \pm\infty$ in $-\gamma m M/|z|$ übergehen.] Geht man mit m nahe an die Scheibe heran $(z \to +0\,,\, V \to ?\,)$, so folgt $K_3^{\text{oberhalb}} = -\partial_z V = -m\, g_{\text{sch}}$ mit $g_{\text{sch}} = ?$

(c) *Superposition*. Die soeben studierte Scheibe läßt sich aus Kreisdrähten mit Radius ρ und Masse $dM = ?$ zusammensetzen. Addieren ($\int$) wir nun die zu diesen infinitesimalen Ursachen gehörigen Antworten $dV(0,0,z)$, so sollten wir erneut beim (b)–Resultat ankommen — nicht wahr ?



Aufgabe 68: Drei Quickies (1+1+1=3 Punkte)

(a) $\partial_x \int_x^\infty dy\; e^{-\alpha y} = ?$ (a.1) sofort (a.2) erst $\int$ auswerten, danach ∂_x

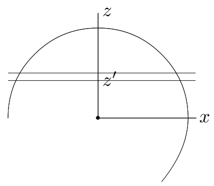
(b) WS–Wdh: $\partial_x \frac{1}{r} = ?$, $\partial_x \frac{x}{r} = ?$ und $\partial_x \frac{x}{r} f'(r) = ?$

(c) Unter $g(x) = \frac{\theta(x)\; x}{(1+x^2)^2}$ liegt die Fläche $J = ?$

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 22**	27.05.2007

[Abgabe 03.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 69: Erde aus Scheiben (4 Punkte)



Das Potential einer Scheibe (R) der Masse M kennen wir aus 60(d):
$V_{\rm Sch}(0,0,z) = -\frac{\gamma m M}{R^2}\, 2\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$.
Schneiden wir nun aus der Erde (Radius $R_{\rm E}$, konstante Massendichte ρ) die Schicht zwischen z' und $z'+dz'$ heraus (Volumen? Masse?), so geht deren Potential dV aus $V_{\rm Sch}$ per Ersetzung $M \to ?$, $R \to ?$, $z \to ?$ hervor. Addition dieser dV's, für $R_{\rm E} < z$, muß $-\gamma m M_{\rm E}/z$ geben. Ist es so? Und aus Addition der dV's für $-R_{\rm E} < z < R_{\rm E}$ folgt $V_{\rm innen}(0,0,z) = ?$ [s.63(b)]

Aufgabe 70: Fünf mal Delta (0.5+0.5+1+1+1=4 Punkte)

(a) $\delta(x) = \beta\,\theta(x)\,e^{-x/\varepsilon}$, $\beta = ?$

(b) 2D: $\delta(\vec r) = \eta\, e^{-r^2/\varepsilon^2}$, $\eta = ?$

(c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}$ macht $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ „weich". Welche $\delta(x)$–Darstellung folgt hieraus?

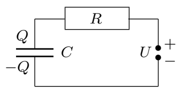
(d) Unter $g(x) = \frac{\theta(x)\, x}{(1+x^2)^2}$ liegt Fläche $J = ?$ $\curvearrowright$ $\delta(x) = ?$

(e) $C\, x^n\, \delta(x^3) \overset{!}{=} \delta(x)$ $\curvearrowright$ $n = ?\ C = ?$

Aufgabe 71: $\boxed{x\,y' + y \,=\, 2\,x}$ (1+1=2 Punkte)

(a) Zur obigen Dgl soll die allgemeine Lösung $y_{\rm allg}(x)$ erhalten werden, und zwar durch Lösen der hom. Dgl und Raten einer speziellen Lsg. der inhomogenen.

(b) Die Physik dazu: Am skizzierten RC–Glied wird zu $t=0$ die konstante Spannung U angelegt, $Q(0)=0$. Jemand schraubt ständig am Kondensator, so daß $C(t) = (1+\omega t)/(R\omega)$ ist. Allgemein gilt $L\,\ddot Q + R\,\dot Q + Q/C = U$. Aber hier ist $L=0$. Wie führt dies auf die y–Dgl? Also ist $Q(t) = ?$



Aufgabe 72: Weltmodell I (1+2=3 Punkte)

Vielleicht läßt sich das aus $\boxed{\dot N = (G-S)N\ ,\ N(0) = N_0}$ folgende Übervölkerungsproblem der Erde (N=Gesamtbevölkerung, G=Geburtenrate, S=Sterberate) dadurch entschärfen, daß man die Raten gemäß $G - S = \alpha/(1+\gamma t)^\lambda$ sanft angleicht ($\lambda > 0$).

(a) Welche Zukunft ergibt sich daraus? $N(t) = ?$

(b) Für welche Werte $\lambda > \lambda_0 = ?$ bleibt N bei $t \to \infty$ endlich? Welche Lösung hat das N–Problem bei genau $\lambda = \lambda_0$? Sei $\lambda = 2$, $\alpha = \gamma$ und $N_0 = 6{,}6$ Mrd., wie viele ($N_\infty \approx ?$) werden wir dann noch?

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 23**	03.06.2008

[Abgabe 10.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 73: $\boxed{x\,y' + y \,=\, 2\,x}$ — vier weitere Wege nach Rom (1+1+1+1=4 Punkte)

In **A71a** haben Sie bereits die allgemeine Lösung $y_{\rm allg}(x)$ der obigen Dgl durch Lösen der hom. Dgl und Raten einer speziellen Lsg. der inhomogenen erhalten. Inzwischen können Sie dies auch auf verschiedene andere Arten. Berechnen Sie daher $y_{\rm allg}(x)$ unabhängig voneinander

(a) als Anwendungsbeispiel zur P–Q–Formel,

(b) mittels *Neuer Funktion* u, $y = x + u$, und *Trennung der Variablen* (TdV),

(c) über *Neue Variable* τ, $x =: e^\tau$, und *Variation der Konstanten* (VdK),

(d) per sofortiger *Variation der Konstanten*.

Aufgabe 74: Mehr Dgln (1+1+2+1=5 Punkte)

(a) Welche allgemeine Lösung $y_{\rm allg}(x)$ hat $y' + y = x$? [hom Lsg; spez Lsg raten ⇒ allg Lsg.]

(b) Welche allgemeine Lösung $y_{\rm allg}(x)$ hat $y' + y^2 = e^x y^2$? [z.B. per TdV; oder neue Fkt $1/y$]

(c) Aus $\dfrac{1}{1+\omega t}\,\dot v + \gamma\, v = k$ soll $y' + x\,y = x$ werden. Wie geht das? $y_{\rm allg}(x) = ?$

(d) Können Sie aus dem nebenstehenden System zweier gekoppelter Dgln erster Ordnung *eine* Dgl zweiter Ordnung für $v_1(t)$ basteln? Wie lautet der ER für $v_1(t)$? Und dessen Lösung?

$$\dot v_1 = \omega\, v_2 \quad , \quad v_1(0) = 0$$
$$\dot v_2 = -\omega\, v_1 \quad , \quad v_2(0) = v_0$$

Aufgabe 75: Weltmodell `II` (5 Punkte)

Wir haben keine Weltregierung. Eine so vernünftige wie in **A72** ist auch so bald nicht zu erwarten. Es wird eine Eigendynamik geben. In $\boxed{\dot N = (G-S)N\ ,\ N(0) = N_0}$ machen wir den Faktor $G - S$ von einer pauschalen Vorratsgröße $V(t)$ abhängig (Rohstoffe, bebaubares Land, Luftsauerstoff etc.): $G - S = G_0 - S_0 + \alpha\,(V - V_0)$, $V(0) = V_0$, welche proportional zu N abnimmt: $\dot V = -\beta N$. Wie auch immer man $G - S$ abnehmen läßt, man kann es als Abnahme der Geburtenrate lesen, oder aber als Zunahme der Sterberate.

Mit „Zeit" $\tau = \sqrt{\alpha\beta N_0}\; t$ und bei Übergang $N(t) = N_0 u(\tau)$, $V - V_0 = -\sqrt{\beta N_0/\alpha}\; v(\tau)$ zu den zwei neuen Funktionen u, v versammeln sich alle Konstanten in einer einzigen: $\eta = (G_0 - S_0)/\sqrt{\alpha\beta N_0}$. Das Dgl–System (zuzüglich Anfangsbedingungen) bekommt dabei die Gestalt $\boxed{u' = u\cdot(\eta - v)\ ,\ v' = u \quad , \quad u(0) = 1\ ,\ v(0) = 0}$.

Stimmt das? Welche Dgl für v allein folgt hieraus? Welche Besonderheit hat sie? Usw. Alles funktioniert, und man kommt analytisch durch bis zur Lösung $u(\tau)$.

[Empfehlung: zu jeder Hilfs– oder Teil–Dgl stets auch ihre Anfangsbedingung notieren (ER's!). Ob $\frac{1}{2+2\eta v - v^2} = \frac{1}{\omega^2 - (v-\eta)^2} = \partial_v \frac{1}{2\omega} \ln\left(\frac{\omega-\eta+v}{\omega+\eta-v}\right)$ mit $\omega := \sqrt{2+\eta^2}$ stimmt und sogar plötzlich zu gebrauchen ist? Kennt man $v(\tau)$, so auch $u(\tau)$. Nach so vielen Gelegenheiten, sich zu verrechnen, möchte man wohl gern vergleichen: $u(\tau) = \frac{4\omega^2\; e^{\omega\tau}}{[\,(\omega-\eta)\, e^{\omega\tau} + \omega + \eta\,]^2}$. Aber hoffentlich stimmt das nicht, denn die Langzeit–Prognose fällt ersichtlich arg traurig aus.]

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 24**	10.06.2008

[Abgabe 17.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 76: Drei mal Green (2+2+2=6 Punkte)

(a) Jemand behauptet, der 2D translationsinvariante Operator $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ habe die Greensche Funktion $G(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \ln\big(\rho^2 + \varepsilon^2\big)$, $\vec{\rho} := (x, y)$, wobei das G–Verhalten bei $\rho \to 0$ vorsichtshalber epsilontisch eingebettet wurde. Stimmt das? [Werten Sie also $\Delta_2 G$ aus, und prüfen per $\int d^2r \ldots$ nach, ob sich eine Darstellung der 2D Deltafunktion ergeben hat. Wie immer ist $\varepsilon = 0^+$]

(b) Zeigen Sie, daß $G = \theta(t)\, e^{-\gamma t} \frac{1}{\Omega} \sin\big(\Omega t\big)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Greensche Funktion von $\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ ist. Als Spezialfall können Sie daraus $G(t) = ?$ des Operators $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t$ gewinnen. [und sparen sich hierzu das Nachprüfen.]

(c) $L = t\, \partial_t$ ist kein translationsinvarianter Operator. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t, a)$ hat er? Bereich sei $0 < t, a < T$. Mittels G erhalte man dann die allgemeine Lösung von $t\, \dot{v} = f(t)$. [Und daß $v_{\rm allg}(t)$ richtig ist, sieht man im Kopf.]

Aufgabe 77: Greensche Funktion von Δ_r (2+1=3 Punkte)

Der Operator $\Delta_r \equiv \frac{1}{r}\partial_r^2 r$ ist nicht translationsinvariant. Seine Greensche Funktion $G(r, a)$ hängt also nicht vom Differenzargument ab. Bereich: positive r–Halbachse.

(a) Ermitteln Sie jene spezielle Greensche Funktion, welche bei $r < a$ verschwindet.

(b) $G(r, a)$ liefert Ihnen nun eine spezielle Lösung $V_{\rm sp} = ?$ von $\Delta_r V(r) = 4\pi\gamma m\, \rho(r)$

[Bem.: Ihre Antwort hat sicherlich, wie in **A63a**, die Form $\int .. + \int ..$, wobei Sie (zur Kontrolle) nach Umformen eines Terms dieser Summe per $\int_0^r .. = {\rm const} - \int_r^\infty ..$ in der Nähe der dortigen Antwort landen könnten.]

Aufgabe 78: Gradient (2+2+1=5 Punkte)

(a) Bilden Sie vier mal den Gradienten, nämlich von $\phi = \;\; y \;,\; yz \;,\; \frac{1}{r}$ und $\vec{E}\,\vec{r}$ ($\vec{E} = {\rm co\vec{n}st}$).

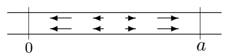
(b) Wir sind in Zermatt, und sehen das Höhenprofil $h = h_0 \arctan(f)$, $f = e^{-x} + y^2$ (hier in dimensionslosen Einheiten). Welchen ungefähren Verlauf hat die Äqui–h–Linie $f = 2$? Längs welcher Kurve zeigt der 2D Gradient ∇h genau nach Westen und entlang welcher anderen Kurve genau nach NW ?

(c) Kontrollieren Sie bitte in Zermatt noch, ob (wie es sich gehört) ∇h bei $(x, y) = (0, 1)$ senkrecht auf der dortigen Äqui–h–Linie steht.

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 25**	17.06.2008

[Abgabe 24.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 79: Drei mal Divergenz (0.5+1+1.5=3 Punkte)

(a) 

Auf einen ∞ langen Wassergraben regnet es bei $x \in (0, a)$, so daß dort ${\rm div}\, \vec{v} = \gamma = {\rm const}$ ist und $\vec{v} = v(x)\, \vec{e}_1$. $v(x)_{\text{innen}} = ?$

(b) Zu welchem λ–Wert ist das blumenstraußförmige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \alpha\, (\lambda\, z\, \vec{r} - r^2 \vec{e}_3)/r^5$ (ausgenommen am Ursprung) quellenfrei ?

(c) Zu allgemein kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $\rho(r)$ sollen die elektrostatischen Maxwell-Gleichungen ${\rm div}\, \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ und ${\rm rot}\, \vec{E} = \vec{0}$ gelöst werden : Ansatz für $\vec{E}$ und schließlich $\vec{E} = ?$
[Am Ende bleibt ein r'–Integral stehen.]

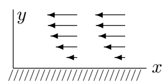
Aufgabe 80: Vier mal Rotation (2+1+2+2=7 Punkte)

(a) Welche Beziehungen zwischen den vier Konstanten sorgen dafür, daß die ebene Wasserströmung $\vec{v} = (\, Ax + By \,,\, Cx + Dy \,,\, 0\,)$ weder Wirbel noch Quellen hat ? Wie nun zu speziell $B = 0$ die Strömung aussieht, das zeige eine Skizze.

(b) $\nabla \times \big[\, \vec{A}(\vec{r}) \times \vec{r}\, \big] \; = 2\vec{A} - \vec{r}\, {\rm div} \vec{A} + r\, \partial_r \vec{A}$ — wie kommt das heraus ? [geht zweizeilig]

(c) Zu welchem λ–Wert ist das blumenstraußförmige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \alpha\, (\lambda\, z\, \vec{r} - r^2 \vec{e}_3)/r^5$ (ausgenommen am Ursprung) wirbelfrei ?

(d) Am Ufer (x–Achse) der Weser nimmt die Wirbelstärke zur Flußmitte hin (y–Richtung) ab : ${\rm rot}\, \vec{v} = \vec{e}_3\, \omega\, e^{-y/a}$. $\vec{v}(\vec{r}) = ?$
[Ansatz für $\vec{v}(\vec{r})$?! Konstante beim Aufleiten physikalisch fixieren!]



Aufgabe 81: Feld zwischen parallelen Ebenen (2+1=3 Punkte)

(a) Magnetostatik: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = \vec{\jmath}\, \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$

Das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = (\, 0 \,,\, B\, [\theta(x) - \theta(x - a)] \,,\, 0\,)$ soll hergestellt werden. [„Feld gegeben, Ursache ermitteln“ ist die denkbar einfachste Fragestellung. Ihr mechanisches Analogon lautet „$\vec{r}(t)$ gegeben, Kraft (längs Bahn) ermitteln“.] Ist die Forderung möglich, d.h. erfüllt sie $\nabla \cdot \vec{B} = 0$? Mit welcher Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ ist der Raum auszustatten ? Wie läßt sich das Resultat mit ein paar $\vec{B}$– und $\vec{\jmath}$–Pfeilen und zwei symbolischen Plattenrändern halbwegs perspektivisch darstellen ?

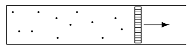
(b) Elektrostatik: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho\, \frac{1}{\varepsilon_0}$, $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

Analog zu (a) [nur eine andere Komponente füllend] kann auch das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = ?$ eines Plattenkondensators angesetzt werden (positive Platte = Ebene $x = 0$, negative = Ebene $x = d$). Prüfen Sie (geht im Kopf), ob $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ erfüllt ist. Mit welcher Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist der Raum auszustatten ?

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 26**	24.06.2008

[Abgabe 01.07. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 82: Conti $\dot{n} + \operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$ (2+1+3=6 Punkte)



(a) Expansion eines Gases. In einem Rohr (bei $x = 0$ verschlossen, Querschittsfläche F) befinden sich N Teilchen. Der Kolben wird mit $x_k(t) = L\,(1+2\omega t)/(1+\omega t)$ so langsam bewegt, daß die Teilchendichte $n(t) = ?$ stets ortsunabhängig bleibt. Welche Teilchenstromdichte $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$ liegt im Inneren vor?
Test I: Wie *sollte* $\jmath(x_k(t),t)$, d.h. die Stromdichte am Kolben, mit $n(t)$ zusammenhängen?
Test II: Ist diese Beziehung erfüllt?
(b) Nach einer Explosion hat die Luft im U–Bahn–Tunnel die Teilchendichte $n = n_0 + n_1\,e^{-\alpha(x-ct)^2}$, wobei n_0, n_1, α positive Konstanten sind und c die Schallgeschwindigkeit in Luft ist. Welche Teilchenstromdichte $\jmath(x,t)$ begleitet den Knall? [mit $\jmath$ ist die erste Komponente gemeint: $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$]
(c) Weil eine Schall–Kugelwelle ständig am Ursprung erzeugt wird, ist der Luftraum ($n_0 :=$ Teichendichte bei Stille) von der kugelsymmetrisch–radialen Teilchenstromdichte

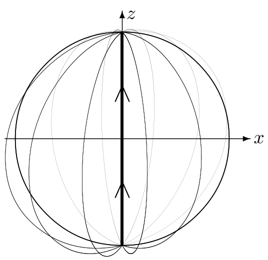
$$\vec{\jmath} = \frac{\alpha\,\omega}{k}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\left[r\,c - \frac{s}{k}\right] \quad \text{mit} \quad c := \cos(kr-\omega t)\;,\; s := \sin(kr-\omega t)$$

erfüllt. Welche Teilchendichte $n(r,t)$ hat die Kugelwelle? Mit welcher Geschwindigkeit v bewegen sich Flächen konstanter Dichte n_0?

Aufgabe 83: $\Delta\,\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\vec{r})$ (1+2=3 Punkte)

(a) Auch mit der Einbettung $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ läßt sich obiger Zusammenhang gut nachweisen. Natürlich ist dabei zuletzt per $\int d^3r\ldots$ eine neue $\delta(\vec{r})$–Darstellung dingfest zu machen.
(b) Würden wir in 2D leben, dann wäre $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ unser Laplace–Operator. Daß $\Delta_{2\,r} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$ sein radialer Anteil ist, glauben wir (wegen Analogie zur bekannten Rechnung in 3D). Aber wir prüfen nach, ob die Operator–Identität $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \equiv \frac{1}{r}\,\partial_r\,r\,\partial_r$ gilt. Deren rhs zeigt (per Δ_2–Anwenden im Kopf), daß nun $-\ln(r)$ das Potential einer Punktladung dieser 2D Welt ist. Wir erwarten $\Delta_{2\,r}\ln(r) = \lambda\,\delta(\vec{r})$, denken uns eine einfache Einbettung des ln aus und ergründen den Wert von λ.

Aufgabe 84: Nord–Süd–Strom (4 Punkte)



Auf der Symmetrieachse einer Kugel (R) fließt Strom I nach oben (z–Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die Conti zu $\dot{\rho} \equiv 0$.
Obigem Text folgend setzen wir die (im ganzen Raum gültige) Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ an als [Hätten Sie es ggf. auch selber so gemacht?]

$$\vec{\jmath} = \vec{e}_3\,I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(R-|z|) + \vec{e}_\vartheta\,f(\vartheta)\,\delta(r-R)\;.$$

Bestimmen Sie nun die Funktion $f(\vartheta)$ aus der Quellenfreiheit des zweiten $\vec{\jmath}$–Terms. [Hinweise: Endlich kommt einmal Nabla in Kugelkoordinaten zu Ehren, eine homogene Dgl 1. Ordnung für $f(\vartheta)$ entsteht und läßt sich lösen. Den unbekannt gebliebenen f–Vorfaktor erhalten Sie aus der Forderung, daß in der Äquatorebene abseits Ursprung insgesamt der Strom I nach unten fließt.]

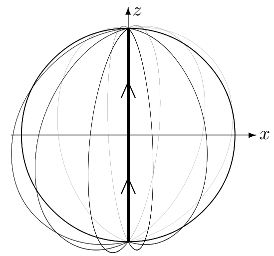
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 27**	01.07.2008

[Abgabe 08.07. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 85: Magnetischer Dipol erzeugt Blumenstrauß (4 Punkte)

Die aus Theorem 3 bekannte Lösung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A} = \int d^3r'\,\frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, $\vec{W} = \frac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_0 c^2}$ der (magnetostatischen) Gleichungen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{W}$ ist nicht immer sofort hilfreich. So ist z.B. bereits für einen Kreisstrom $\vec{\jmath} = I\,\delta(z)\,\delta(\rho-R)\,\vec{e}_\varphi$ das Integral nicht mehr ausführbar, es sei denn man läßt den Kreisstrom per $R \to 0$ (und zugleich $I \to \infty$) zu einem *magnetischen Dipol* werden [wie immer ist hier natürlich $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$]. Noch vor Integration können Sie nun $1/\sqrt{} = \ldots ? \ldots + \mathcal{O}(R^2)$ vereinfachen, daraufhin das φ'–Integral auswerten und schließlich $\vec{A} = \frac{I\cdot\text{Kreisfläche}}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2}\left(-\frac{y}{r^3}\,,\,\frac{x}{r^3}\,,\,0\right)$ erhalten. Ist es so? Prüfen Sie nun, ob sich per $\nabla\times$ wirklich das Blumenstrauß–Feld $\vec{B}$ aus **A79b** ergibt [λ war dort 3].

Aufgabe 86: Nord–Süd–Strom II (1+2=3 Punkte)

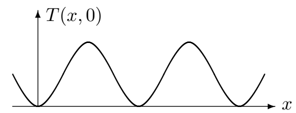


Auf der Symmetrieachse einer Kugel (R) fließt Strom I nach oben (z–Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die Conti zu $\dot{\rho} \equiv 0$.
In **A84** haben Sie aus diesen Angaben die folgende Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ erhalten:

$$\vec{\jmath} = \vec{e}_3\,I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(R-|z|) + \vec{e}_\vartheta\,\frac{I}{2\pi R}\,\frac{1}{\sin(\vartheta)}\,\delta(r-R)\;.$$

(a) Um das von $\vec{\jmath}$ verursachte Magnetfeld $\vec{B}$ mittels der (integralen, statischen vierten Maxwell–) Gleichung $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_S d\vec{f}\cdot\vec{\jmath}\,\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, wobei C die Randkurve der Fläche S ist, zu erhalten, ist Information über seine Richtung erforderlich. Angenommen (sehr mutig, aber bei (b) prüfen Sie dies nach) $\vec{B}$ ist überall proportional zu $\vec{e}_\varphi$. Dann ist $\vec{B} = ?$ (Geben Sie bitte $\vec{B}$ mittels $\theta(\ldots)$ im ganzen Raum an).
(b) Das Nachprüfen der (lokalen, statischen vierten Maxwell–) Gleichung $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\jmath}\,\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ (also zu gegebenem $\vec{B}$ die Ursache $\vec{\jmath}$ zu berechnen) ist hier ein wenig anstrengend [Empfehlung: $\nabla\times$ kartesisch ausführen; die Singularität an der z–Achse bleibe unbeachtet]. Kommt der zweite $\vec{\jmath}$–Term wieder richtig heraus?

Aufgabe 87: e hoch Laplace: Diffusion gleicht aus (3 Punkte)

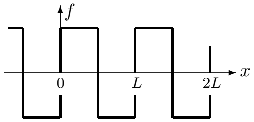


Zur Zeit $t=0$ liege die räumliche, aber nur mit x variierende Temperatur–Verteilung $T(\vec{r},0) = T_0\,(1-\cos(kx))$ vor. Wie verändert sich $T(\vec{r},t)$ im Laufe der Zeit, wenn es der Diffusionsgleichung $T(\vec{r},t) = e^{t\,D\,\Delta}\;T(\vec{r},0)$ genügt? [Hinweise: D ist konstant. Was ist e hoch Operator?? e-Reihe!!]
Welche Gestalt erreicht die Temperatur–Verteilung im Limes $t \to \infty$?

Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 28**	08.07.2008

[Abgabe 15.07. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 88: Rechteckschwingung (2+1+1=4 Punkte)

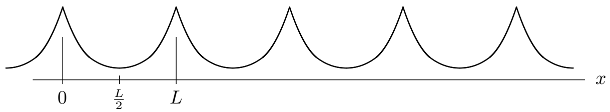


(a) Welche Fourier–Koeffizienten c_n hat die rechts skizzierte Funktion $f(x) = \{1 - 2\,\theta(x - \frac{L}{2})$ in $(0, L)$; L–periodisch sonst$\}$?

(b) Können Sie die $f(x)$–Summe rein reell schreiben? Zeigen ihre ersten zwei Terme (skizzieren Sie) bereits die richtige Tendenz?

(c) Es sei $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}$, sagt Bronstein. Mit ihrem Ergebnis aus (b) können Sie nun zeigen, weshalb es stimmt.

Aufgabe 89: Periodisches Zelt (3+1=4 Punkte)



(a) Welche Fourier–Koeffizienten c_n hat die L–periodische Funktion $f(x)$, die für $0 < x < L$ durch $f(x) = h \cdot \cosh\left(\frac{2\alpha}{L}\left[\,x - \frac{L}{2}\,\right]\right)$ definiert ist? Welche reellen Koeffizienten f_0, a_n, b_n hat sie folglich? Es ist anschaulich klar, welche Werte diese reellen Koeffizienten bei $\alpha = 0$ haben; nehmen auch ihre Resultate bei $\alpha \to 0$ diese Werte an?

(b) Das Resultat aus (a), aufgeschrieben in der Form $f(x) = \sum_n \ldots e^{in\frac{2\pi}{L}x}$, enthält die drei Parameter L, h und α. Wie sind sie zu wählen und was ist dann zu tun, um die Fourier–Reihe von $g(x) = \{\cosh(x)$ für $-1 < x < 1$; 2–periodisch sonst$\}$ zu erhalten? Wie sieht letztere also aus?

Aufgabe 90: Beispiel zur Fourier–Transformation (2+1+1=4 Punkte)

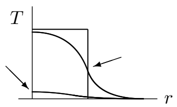
(a) Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(k)$ hat $f(x) = e^{-\gamma|x|}$?

(b) Wie folgt hieraus, daß $\int dk\, \frac{\cos(kx)}{\gamma^2+k^2} = \frac{\pi}{\gamma}\, e^{-\gamma|x|}$ ist?

(c) Folglich ist $\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kx)}{k} = ?$

Aufgabe 91: Physik per Fourier–Transformation (2+1=3 Punkte)

(a) Heiße Kugel: $T(\vec{r}, 0) = T_0\, \theta(R - r)$. $\widetilde{T}(\vec{k}, 0) = ?$ Und folglich (per Diffusionsgleichung $T(\vec{r}, t) = e^{tD\Delta}\, T(\vec{r}, 0)$, s. **A87**) $T(\vec{r}, t) = ?$ Das wilde $\int d^3k$–Integral, welches hier zunächst steht, läßt sich noch auf ein gewöhnliches k–Integral herunterkochen. Am Ursprung herrscht die Temperatur $T(\vec{0}, t) = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kR) - kR\cos(kR)}{k}\, e^{-tDk^2}$ — richtig?



(b) Fortsetzung zur heißen Kugel. Die Temperatur T sinkt und sinkt — auch am Ursprung. Dort (links unten in der Skizze) interessiere der führende Term der Langzeit–Asymptotik, d.h. $T(\vec{0}, t \to \infty) \to ?$

Lösung 28

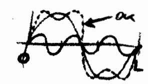
88 (a) $c_n = \frac{1}{L}\int_0^{L/2} dx\, e^{-i\frac{2\pi}{L}x} - \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{0} \ldots = \ldots - \frac{1}{L}\int_0^{L/2} dx\, e^{+in\frac{2\pi}{L}x}$

$= \frac{1}{L}\,\frac{1}{-in\frac{2\pi}{L}}\left(e^{-in\frac{2\pi}{L}\cdot\frac{L}{2}} - 1\right) - \text{dito}_{-n} = \frac{1-(-1)^n}{in2\pi} - \text{dito}_{-n}$

$\Rightarrow c_{n\,\text{gerade}} = 0, \quad c_{n\,\text{ungerade}} = \frac{2}{in\pi}$

(b) $f(x) = \sum_{n\,\text{ung.}} \frac{2}{in\pi}\, \underbrace{e^{in\frac{2\pi}{L}x}}_{\text{ung. Anteil} = i\sin(\ldots)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots} \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$

$= \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(3\cdot\frac{2\pi}{L}x\right) + \ldots$



(c) $1 = f\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$

89 (a) $c_n = \frac{h}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x}\, \frac{1}{2}\, e^{\frac{2\alpha}{L}(x-\frac{L}{2})} + \text{dito}_{-\alpha}$

$= \frac{h}{2L}\, e^{-\alpha}\left[\frac{e\;e}{-in\frac{2\pi}{L} + \frac{2\alpha}{L}}\right]_0^L + \text{dito}_{-\alpha} = \frac{he^{-\alpha}}{2L}\,\frac{L\,(e^{2\alpha}-1)}{2(\alpha - in\pi)} + \text{dito}_{-\alpha}$

$= \frac{h}{2}\sinh(\alpha)\left(\frac{1}{\alpha - in\pi} + \frac{1}{\alpha + in\pi}\right) = \frac{h\alpha\sinh(\alpha)}{\alpha^2 + (n\pi)^2}$

$\Rightarrow f_0 = c_0 = \frac{h}{\alpha}\sinh(\alpha)\,, \quad a_n = 2c_n\,, \quad b_n = 0$

für $\alpha \to 0$, erwarte $f_0 \to h$, $a_n, b_n \to 0$ – und so ist es auch ✓

(b) $f(x) = \sum_n \frac{h\alpha\sinh(\alpha)}{\alpha^2 + (n\pi)^2}\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$: setze $h=1$, $L=2\alpha$, $\alpha=1$

damit ist $\cosh(x-1) = \sum_n \frac{\sinh(1)}{1+(n\pi)^2}\, e^{in\pi x}$

$x \to x+1$ gibt nun $\cosh(x) = \sum_n \frac{\sinh(1)\,(-1)^n}{1+(n\pi)^2}\, e^{in\pi x}$

90 (a) $\widetilde{f}(k) = \int dx\, e^{-ikx}\, e^{-\gamma|x|} = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\gamma|x|}\,, \quad \int = 2\int_0^\infty$

$= \int_0^\infty dx\, e^{ikx - \gamma x} + \text{dito}_{-k} = \frac{1}{\gamma - ik} + \frac{1}{\gamma + ik} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + k^2}$

(b) also ist $e^{-\gamma|x|} = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\, \frac{2\gamma}{\gamma^2+k^2} = \frac{1}{2\pi}\int dk\, \cos(kx)\,\frac{2\gamma}{\gamma^2+k^2}$, qed.

(c) ∂_x auf (b) $\rightsquigarrow -\int dk\, \frac{k\sin(kx)}{\gamma^2+k^2} = -\pi\,\text{sign}(x)\, e^{-\gamma|x|}$

$\gamma \to 0 \Rightarrow \int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi}{2}\,\text{sign}(x)$

91 (a) $\widetilde{T}(\vec{k}, 0) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, T_0\,\Theta(R-r) = 2\pi\int_0^R dr\, r^2\, T_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} du\, e^{-ikru}}_{= \frac{2\sin(kr)}{kr}}$

$r \to \frac{1}{k}r \qquad = T_0\,\frac{4\pi}{k^3}\int_0^{kR} dr\,\left(r\sin(r) = \partial_r\left[\sin(r) - r\cos(r)\right]\right)$

$= 4\pi T_0\, \frac{\sin(kR) - kR\cos(kR)}{k^3}$

$T(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, e^{-tDk^2}\, 4\pi T_0\, \frac{s - kRc}{k^3}$

$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty dk\, k^2\, \frac{2\sin(kr)}{kr}\, e^{-tDk^2}\, 4\pi T_0\, \frac{s - kRc}{k^3}$

$r \to 0$: $\frac{\sin(kr)}{kr} \to 1 \Rightarrow$ das angegebene $T(\vec{0}, t)$

(b) $t \to \infty$: kleine k, $(s - kRc) \to -\frac{1}{6}(kR)^3 + \frac{1}{2}(kR)^3 = \frac{1}{3}k^3R^3$, $k \to \frac{k}{\sqrt{tD}}$

$T(\vec{0}, t\to\infty) = \frac{2T_0}{\pi}\cdot\frac{1}{3}R^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{Dt}}\right)^3\cdot\underbrace{\int_0^\infty dk\, k^2 e^{-k^2}}_{= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}} = \frac{T_0}{6\sqrt{\pi}}\left(\frac{R}{\sqrt{Dt}}\right)^3$

Probeklausur zu EMTP II | Uni Bielefeld | 15.07.2008

[Materialien bereitlegen ; Wecker auf 2 Stunden stellen ; Alle Aufgaben lesen, selektiv bearbeiten]
[Nach 2h Blatt umdrehen, korrigieren ; 32 Punkte, bei ≥ 10 hätten Sie bestanden]

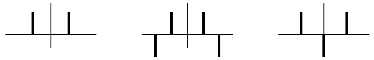
Aufgabe 1: (1 Punkt)
Welche Form haben die Äquipotential–Linien des 2D–Potentials $V(\vec{r}) = e^{-3\arctan\left(9y^2/a^2+5+x^2/a^2\right)}$?

Aufgabe 2: Ein gewöhnliches Integral (2 Punkte)
Berechnen Sie $I = \int_0^\infty du\, u^2\, e^{-u^2}$. Läßt sich mit der Idee $-\partial_\alpha J(\alpha)\big|_{\alpha=1}$ etwas anfangen ?

Aufgabe 3: Arbeit (3 Punkte)
Welche Arbeit muß an einem Teilchen verrichtet werden, um es im Kraftfeld $\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{r}$ entlang der Kurve $\vec{r}(\alpha) = R\,(\sin(\alpha) - \alpha\cos(\alpha)\,,\, \cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha))$ von $\vec{r}(0)$ nach $\vec{r}(\pi)$ zu bewegen? [Hinweis: 2D Problem, $r = |\vec{r}|$; Es gibt 2 Wege zum Ziel, via Kurvenintegral oder via Potential.]

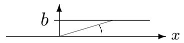
Aufgabe 4: Volumenintegral (3 Punkte)
Eine Halbkugel (Radius R, homogene Massendichte ρ_0) liegt auf der x–y–Ebene. Berechnen Sie die Gesamtmasse M und den Schwerpunkt $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$. Werten Sie das $\int d^3r$ für MR_3 bitte entweder in Zylinder– oder in Kugelkoordinaten aus.

Aufgabe 5: Delta (1+1+1.5=3.5 Punkte)
(a) 1D Delta-Darstellung (mit $\varepsilon \to 0^+$): $\delta(x) = \alpha\,\theta(x)\,e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$
(b) 2D Delta-Darstellung (mit $\varepsilon \to 0^+$): $\delta(\vec{r}) = \eta\, e^{-r^2/\varepsilon^2}$, $\eta = ?$ [Hier ist $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$]
(c) Zeichnen Sie in die drei Skizzen (| bedeutet δ) jeweils die antisymmetrische Stammfunktion ein.



Aufgabe 6: Dgl 1.Ordnung (2 Punkte)
Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $\dot{v}(t) = -\alpha v(t) + k_0 e^{\beta t}$ per *PQ–Formel*. [*eine* Konstante?!]

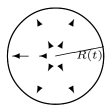
Aufgabe 7: krumme Koordinaten (1 Punkt)
Welche Polarkoordinaten–Darstellung $r(\varphi)$ hat die Horizontale $y = b$?



Aufgabe 8: Gradient (1+2=3 Punkte)
(a) Bilden Sie den Gradienten von $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{r})$. [$\vec{a}$, $\vec{b}$ = const] (b) Bilden Sie $e^{\vec{r}\cdot\nabla}\, r^2$.

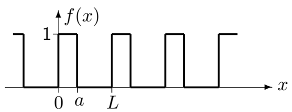
Aufgabe 9: Rotation (3 Punkte)
Kontrollieren Sie am Beispiel $\vec{B} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ ($\vec{\omega}$ = const), ob $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{r}\times\frac{1}{2+(\vec{r}\cdot\nabla)}\vec{B}(\vec{r})$ ein Vektorpotential von $\vec{B}(\vec{r})$ sein kann.

Aufgabe 10: Kontinuitätsgleichung (4 Punkte)
Ein Gas aus N Teilchen ist in einer Kugel eingeschlossen. Deren Radius wird nun ab $t=0$ mit Geschwindigkeit v vergrößert: $R(t) = R_0 + vt$. Die Teilchendichte $n(t)$ bleibe dabei ortsunabhängig. Berechnen Sie die Teilchen–Stromdichte $\vec{j}(r,t)$.



Aufgabe 11: Laplace–Greens (2 Punkte)
$\chi(r) = \frac{1}{r+\varepsilon}$ (mit $\varepsilon \to 0^+$) bettet $\frac{1}{r}$ ein. Zeigen Sie, daß es sich bei $\Delta_r\,\chi$ um eine Darstellung von $-4\pi\,\delta(\vec{r})$ handelt. [Δ_r ist der Radial-Anteil des Laplace-Operators.]

Aufgabe 12: Fourier–Reihe (2 Punkte)
Welche Fourier–Koeffizienten c_n hat die skizzierte periodische Funktion? [Hinweis: c_0 separat angeben.]



Aufgabe 13: Fourier–Transformation (2.5 Punkte)
3D . $T(\vec{r}) = \gamma\,\delta(r-R)$. Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{T}(\vec{k})$ hat diese heiße Kugeloberfläche ?

(1) $9y^2 + 5a^2 + x^2 = \text{const.}$, $(x/3)^2 + y^2 = C^2$, Ellipsen

(2) $I = -\partial_\alpha J|_{\alpha=1}$ mit $J = \int_0^\infty du\, e^{-\alpha u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-1/2}$ $\Rightarrow$ $I = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(3) $A = \int_0^\pi d\alpha\, (\partial_\alpha \vec{r})\cdot(-\vec{K}(\vec{r})) = \int_0^\pi d\alpha\; R\alpha\,(s,c)\cdot\left(\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{r}\right)$ mit $s \equiv \sin(\alpha)$, $c \equiv \cos(\alpha)$

$r^2 = R^2(1+\alpha^2)$, $(s,c)\cdot\vec{r} = R$

$= \frac{\gamma m M}{R}\int_0^\pi d\alpha\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}} = \partial_\alpha\left[-(1+\alpha^2)^{-1/2}\right]\right) = \frac{\gamma m M}{R}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}+1\right)$

oder $\vec{K} = \vec{\nabla}\frac{\gamma m M}{r} = -\vec{\nabla}V$, $A = V(r(\pi)) - V(r(0)) = V(R\sqrt{1+\pi^2}) - V(R) = -\frac{\gamma m M}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}+1\right)$

(4) $M = \rho_0 V_{HK} = \rho_0\frac{2\pi R^3}{3}$, $\vec{R} = (0,0,R_3)$, $MR_3 = \rho_0\int_{(HK)} d^3r\; z$

Zylinderko.: $MR_3 = \rho_0\, 2\pi\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz\, z = \rho_0\pi\int_0^R d\rho\,\rho\,(R^2-\rho^2) = \rho_0\pi\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)$

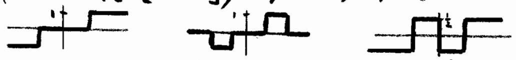
oder Ku.: $MR_3 = \rho_0\int_0^R dr\, r^2\int_{(2\pi)} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\vartheta\,\sin(\vartheta)\, r\cos(\vartheta) = \rho_0\frac{R^4}{4}2\pi\int_0^{\pi/2} d\vartheta\left(sc = \partial_\vartheta\frac{1}{2}s^2\right) = \rho_0\pi\frac{R^4}{4}$

$\Rightarrow$ $R_3 = \frac{3}{8}R$

(5) (a) $1 \stackrel{!}{=} \alpha\int_0^\infty dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} = \alpha\varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\alpha = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$

(b) $1 \stackrel{!}{=} \eta\, 2\pi\int_0^\infty dr\left(r e^{-r^2/\varepsilon^2} = \partial_r\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}e^{-r^2/\varepsilon^2}\right]\right) = \eta\pi\varepsilon^2$, $\eta = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}$

(c) $\partial_x\theta = \delta$ $\Rightarrow$



(6) $\dot{v} + Pv = Q$ mit $P = \alpha$, $Q(t) = k_0 e^{\beta t}$. PQ $\Rightarrow$ $v_{allg.}(t) = e^{-\int_{t_0}^t dt' P}\left(C + \int_{t_1}^t dt'\, Q(t')\, e^{\int_{t_0}^{t'} dt'' P}\right)$

$\Rightarrow$ $v_{allg.}(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}\left(C + \int_{t_1}^t dt'\, k_0 e^{\beta t'} e^{\alpha(t'-t_0)}\right) = \tilde{C}e^{-\alpha t} + \frac{k_0}{\alpha+\beta}e^{\beta t}$

(7) $\sin(\varphi) = b/r$ $\Rightarrow$ $r(\varphi) = b/\sin(\varphi)$

(8) (a) $\vec{\nabla}\,\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{r}) = \partial_i\, a_j\,\varepsilon_{jkl}\, b_k\, x_l = a_j\,\varepsilon_{jki}\, b_k = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k = \vec{a}\times\vec{b}$

(b) $(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\, r^2 = \vec{r}\cdot 2r\,\vec{\nabla}r = \vec{r}\cdot 2r\frac{\vec{r}}{r} = 2r^2$, $e^{\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}\, r^2 = e^2 r^2$

(9) $(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = 1\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{A} = -\frac{1}{3}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{3}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\right) = -\frac{1}{3}\left(-\vec{\omega}\times\underbrace{\vec{\nabla}r^2}_{=2\vec{r}} - \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{r})}_{=0}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) + \vec{r}\times\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{=\vec{\omega}}\right) = \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{B}$ ✓

(10) $n = N\frac{3}{4\pi R^3}$, Conti: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\dot{n} = \frac{9Nv}{4\pi R^4}$, Ansatz: $\vec{j} = \vec{r}\,f(r,t)$

$3f + \vec{r}\cdot(\vec{\nabla}r)\,\partial_r f = \boxed{3f + rf' = \frac{9Nv}{4\pi R^4}}$, $f_{hom} = \frac{c}{r^3}$ (z.B. via Potenzansatz) , $f_{spez} = \frac{3Nv}{4\pi R^4}$

$c \stackrel{!}{=} 0$, damit $\vec{j} = \vec{0}$ am Ursprung $\Rightarrow$ $\vec{j} = \vec{r}\,\frac{3Nv}{4\pi R^4}$

(11) $\Delta_r\chi = \frac{1}{r}\partial_r\partial_r\frac{r}{r+\varepsilon} = \frac{1}{r}\partial_r\frac{\varepsilon}{(r+\varepsilon)^2} = \frac{-2\varepsilon}{r(r+\varepsilon)^3}$

$\int d^3r\left(\frac{-2\varepsilon}{r(\,)^3}\right) = -2\varepsilon\, 4\pi\int_0^\infty dr\,\frac{r+\varepsilon-\varepsilon}{(\,)^3} = -2\varepsilon\, 4\pi\left[-\frac{1}{(\,)} + \frac{\varepsilon}{2(\,)^2}\right]_0^\infty = -4\pi$ ✓

(12) $c_n = \frac{1}{L}\int_0^a dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x}$, $c_0 = \frac{a}{L}$, $c_{n\neq 0} = \frac{i}{2\pi n}\left(e^{-in\frac{2\pi}{L}a} - 1\right)$

(13) $\widetilde{T}(\vec{k}) = \int d^3r\; \gamma\,\delta(r-R)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = \gamma\, 2\pi\int_0^\infty dr\; r^2\delta(r-R)\underbrace{\int_{-1}^{1} du\; e^{ikru}}_{=\frac{2}{kr}\sin(kr)} = \gamma\, 4\pi R\,\frac{\sin(kR)}{k}$