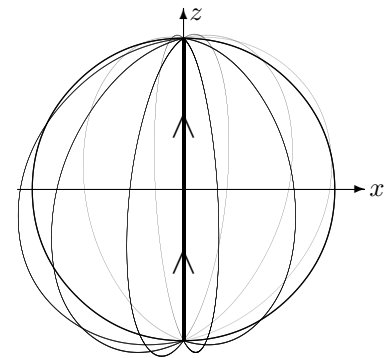


Aufgabe 85: Magnetischer Dipol erzeugt Blumenstrauß (4 Punkte)

Die aus Theorem 3 bekannte Lösung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A} = \int d^3r' \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$, $\vec{W} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2}$ der (magnetostatischen) Gleichungen $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{rot} \vec{B} = \vec{W}$ ist nicht immer sofort hilfreich. So ist z.B. bereits für einen Kreisstrom $\vec{j} = I \delta(z) \delta(\rho - R) \vec{e}_\varphi$ das Integral nicht mehr ausführbar, es sei denn man läßt den Kreisstrom per $R \rightarrow 0$ (und zugleich $I \rightarrow \infty$) zu einem *magnetischen Dipol* werden [wie immer ist hier natürlich $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$]. Noch vor Integration können Sie nun $1/\sqrt{\dots} = \dots? \dots + \mathcal{O}(R^2)$ vereinfachen, daraufhin das φ' -Integral auswerten und schließlich $\vec{A} = \frac{I \cdot \text{Kreisfläche}}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0\right)$ erhalten. Ist es so? Prüfen Sie nun, ob sich per $\nabla \times$ wirklich das Blumenstrauß-Feld \vec{B} aus **A79b** ergibt [λ war dort 3].

Aufgabe 86: Nord-Süd-Strom II (1+2=3 Punkte)

Auf der Symmetrieachse einer Kugel (R) fließt Strom I nach oben (z -Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die Conti zu $\dot{\rho} \equiv 0$.



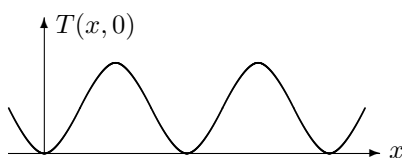
In **A84** haben Sie aus diesen Angaben die folgende Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ erhalten:

$$\vec{j} = \vec{e}_3 I \delta(x) \delta(y) \theta(R - |z|) + \vec{e}_\vartheta \frac{I}{2\pi R} \frac{1}{\sin(\vartheta)} \delta(r - R).$$

(a) Um das von \vec{j} verursachte Magnetfeld \vec{B} mittels der (integralen, statischen vierten Maxwell-) Gleichung $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, wobei C die Randkurve der Fläche S ist, zu erhalten, ist Information über seine Richtung erforderlich. Angenommen (sehr mutig, aber bei (b) prüfen Sie dies nach) \vec{B} ist überall proportional zu \vec{e}_φ . Dann ist $\vec{B} = ?$ (Geben Sie bitte \vec{B} mittels $\theta(\dots)$ im ganzen Raum an).

(b) Das Nachprüfen der (lokalen, statischen vierten Maxwell-) Gleichung $\text{rot} \vec{B} = \vec{j} \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ (also zu gegebenem \vec{B} die Ursache \vec{j} zu berechnen) ist hier ein wenig anstrengend [Empfehlung: $\nabla \times$ kartesisch ausführen; die Singularität an der z -Achse bleibe unbeachtet]. Kommt der zweite \vec{j} -Term wieder richtig heraus?

Aufgabe 87: e hoch Laplace: Diffusion gleicht aus (3 Punkte)



Zur Zeit $t=0$ liege die räumliche, aber nur mit x variierende Temperatur-Verteilung $T(\vec{r}, 0) = T_0 (1 - \cos(kx))$ vor. Wie verändert sich $T(\vec{r}, t)$ im Laufe der Zeit, wenn es der Diffusionsgleichung $T(\vec{r}, t) = e^{tD\Delta} T(\vec{r}, 0)$ genügt? [Hinweise: D ist konstant. Was ist e hoch Operator?? e -Reihe!]

Welche Gestalt erreicht die Temperatur-Verteilung im Limes $t \rightarrow \infty$?