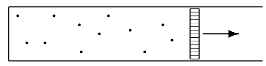
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 26**	24.06.2008

[Abgabe 01.07. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 82: Conti $\dot{n} + \mathrm{div}\ \vec{\jmath} = 0$ (2+1+3=6 Punkte)



(a) Expansion eines Gases. In einem Rohr (bei $x = 0$ verschlossen, Querschittsfläche F) befinden sich N Teilchen. Der Kolben wird mit $x_\mathrm{k}(t) = L\,(1+2\omega t)/(1+\omega t)$ so langsam bewegt, daß die Teilchendichte $n(t) = ?$ stets ortsunabhängig bleibt. Welche Teilchenstromdichte $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$ liegt im Inneren vor?
Test I: Wie *sollte* $\jmath(x_k(t),t)$, d.h. die Stromdichte am Kolben, mit $n(t)$ zusammenhängen?
Test II: Ist diese Beziehung erfüllt?

(b) Nach einer Explosion hat die Luft im U–Bahn–Tunnel die Teilchendichte $n = n_0 + n_1\, e^{-\alpha(x-ct)^2}$, wobei n_0, n_1, α positive Konstanten sind und c die Schallgeschwindigkeit in Luft ist. Welche Teilchenstromdichte $\jmath(x,t)$ begleitet den Knall? [mit $\jmath$ ist die erste Komponente gemeint: $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$]

(c) Weil eine Schall–Kugelwelle ständig am Ursprung erzeugt wird, ist der Luftraum ($n_0 :=$ Teichendichte bei Stille) von der kugelsymmetrisch–radialen Teilchenstromdichte

$$\vec{\jmath} = \frac{\alpha\,\omega}{k}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\left[r\,c - \frac{s}{k}\right] \quad \text{mit} \quad c := \cos(kr-\omega t)\ ,\ s := \sin(kr - \omega t)$$

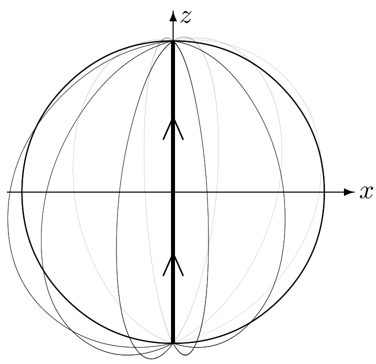
erfüllt. Welche Teilchendichte $n(r,t)$ hat die Kugelwelle? Mit welcher Geschwindigkeit v bewegen sich Flächen konstanter Dichte n_0?

Aufgabe 83: $\Delta\,\frac{1}{r} \;=\; -4\pi\,\delta(\vec{r})$ (1+2=3 Punkte)

(a) Auch mit der Einbettung $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ läßt sich obiger Zusammenhang gut nachweisen. Natürlich ist dabei zuletzt per $\int d^3r\ldots$ eine neue $\delta(\vec{r})$–Darstellung dingfest zu machen.

(b) Würden wir in 2D leben, dann wäre $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ unser Laplace–Operator. Daß $\Delta_{2\,r} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$ sein radialer Anteil ist, glauben wir (wegen Analogie zur bekannten Rechnung in 3D). Aber wir prüfen nach, ob die Operator–Identität $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \;\equiv\; \frac{1}{r}\,\partial_r\, r\,\partial_r$ gilt. Deren rhs zeigt (per Δ_2–Anwenden im Kopf), daß nun $-\ln(r)$ das Potential einer Punktladung dieser 2D Welt ist. Wir erwarten $\Delta_{2\,r}\ln(r) \;=\; \lambda\,\delta(\vec{r})$, denken uns eine einfache Einbettung des ln aus und ergründen den Wert von λ.

Aufgabe 84: Nord–Süd–Strom (4 Punkte)



Auf der Symmetrieachse einer Kugel (R) fließt Strom I nach oben (z–Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die Conti zu $\dot{\rho} \equiv 0$.

Obigem Text folgend setzen wir die (im ganzen Raum gültige) Stromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r})$ an als [Hätten Sie es ggf. auch selber so gemacht?]

$$\vec{\jmath} = \vec{e}_3\, I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(R-|z|) + \vec{e}_\vartheta\, f(\vartheta)\,\delta(r-R)\ .$$

Bestimmen Sie nun die Funktion $f(\vartheta)$ aus der Quellenfreiheit des zweiten $\vec{\jmath}$–Terms. [Hinweise: Endlich kommt einmal Nabla in Kugelkoordinaten zu Ehren, eine homogene Dgl 1. Ordnung für $f(\vartheta)$ entsteht und läßt sich lösen. Den unbekannt gebliebenen f–Vorfaktor erhalten Sie aus der Forderung, daß in der Äquatorebene abseits Ursprung insgesamt der Strom I nach unten fließt.]