Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 24**	10.06.2008

[Abgabe 17.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 76: Drei mal Green (2+2+2=6 Punkte)

(a) Jemand behauptet, der 2D translationsinvariante Operator $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ habe die Greensche Funktion $G(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\rho^2 + \varepsilon^2\right)$, $\vec{\rho} := (x, y)$, wobei das G–Verhalten bei $\rho \to 0$ vorsichtshalber epsilontisch eingebettet wurde. Stimmt das? [Werten Sie also $\Delta_2 G$ aus, und prüfen per $\int d^2r \ldots$ nach, ob sich eine Darstellung der 2D Deltafunktion ergeben hat. Wie immer ist $\varepsilon = 0^+$]

(b) Zeigen Sie, daß $G = \theta(t)\, e^{-\gamma t} \frac{1}{\Omega} \sin\left(\Omega t\right)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Greensche Funktion von $\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ ist. Als Spezialfall können Sie daraus $G(t) = ?$ des Operators $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t$ gewinnen. [und sparen sich hierzu das Nachprüfen.]

(c) $L = t\,\partial_t$ ist kein translationsinvarianter Operator. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t, a)$ hat er? Bereich sei $0 < t, a < T$. Mittels G erhalte man dann die allgemeine Lösung von $t\,\dot{v} = f(t)$. [Und daß $v_{\rm allg}(t)$ richtig ist, sieht man im Kopf.]

Aufgabe 77: Greensche Funktion von Δ_r (2+1=3 Punkte)

Der Operator $\Delta_r \equiv \frac{1}{r}\partial_r^2 r$ ist nicht translationsinvariant. Seine Greensche Funktion $G(r, a)$ hängt also nicht vom Differenzargument ab. Bereich: positive r–Halbachse.

(a) Ermitteln Sie jene spezielle Greensche Funktion, welche bei $r < a$ verschwindet.

(b) $G(r, a)$ liefert Ihnen nun eine spezielle Lösung $V_{\rm sp} = ?$ von $\Delta_r V(r) = 4\pi\gamma m\, \rho(r)$

[Bem.: Ihre Antwort hat sicherlich, wie in **A63a**, die Form $\int .. + \int ..$, wobei Sie (zur Kontrolle) nach Umformen eines Terms dieser Summe per $\int_0^r .. = \text{const} - \int_r^\infty ..$ in der Nähe der dortigen Antwort landen könnten.]

Aufgabe 78: Gradient (2+2+1=5 Punkte)

(a) Bilden Sie vier mal den Gradienten, nämlich von $\phi =\ y\ ,\ yz\ ,\ \frac{1}{r}$ und $\vec{E}\,\vec{r}$ ($\vec{E} = \vec{\text{const}}$).

(b) Wir sind in Zermatt, und sehen das Höhenprofil $h = h_0 \arctan(f)$, $f = e^{-x} + y^2$ (hier in dimensionslosen Einheiten). Welchen ungefähren Verlauf hat die Äqui–h–Linie $f = 2$? Längs welcher Kurve zeigt der 2D Gradient ∇h genau nach Westen und entlang welcher anderen Kurve genau nach NW?

(c) Kontrollieren Sie bitte in Zermatt noch, ob (wie es sich gehört) ∇h bei $(x, y) = (0, 1)$ senkrecht auf der dortigen Äqui–h–Linie steht.