Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 23**	03.06.2008

[Abgabe 10.06. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 73: $\boxed{x\,y' + y \,=\, 2\,x}$ — vier weitere Wege nach Rom (1+1+1+1=4 Punkte)

In **A71a** haben Sie bereits die allgemeine Lösung $y_{\text{allg}}(x)$ der obigen Dgl durch Lösen der hom. Dgl und Raten einer speziellen Lsg. der inhomogenen erhalten. Inzwischen können Sie dies auch auf verschiedene andere Arten. Berechnen Sie daher $y_{\text{allg}}(x)$ unabhängig voneinander

(a) als Anwendungsbeispiel zur P–Q–Formel,

(b) mittels *Neuer Funktion* u , $y = x + u$, und *Trennung der Variablen* (TdV),

(c) über *Neue Variable* τ , $x =: e^{\tau}$, und *Variation der Konstanten* (VdK),

(d) per sofortiger *Variation der Konstanten*.

Aufgabe 74: Mehr Dgln (1+1+2+1=5 Punkte)

(a) Welche allgemeine Lösung $y_{\text{allg}}(x)$ hat $y' + y = x$? [hom Lsg; spez Lsg raten $\Rightarrow$ allg Lsg.]

(b) Welche allgemeine Lösung $y_{\text{allg}}(x)$ hat $y' + y^2 = e^x y^2$? [z.B. per TdV; oder neue Fkt $1/y$]

(c) Aus $\dfrac{1}{1+\omega t}\,\dot{v} + \gamma\, v = k$ soll $y' + x\,y = x$ werden. Wie geht das? $y_{\text{allg}}(x) = ?$

(d) Können Sie aus dem nebenstehenden System zweier gekoppelter Dgln erster Ordnung *eine* Dgl zweiter Ordnung für $v_1(t)$ basteln? Wie lautet der ER für $v_1(t)$? Und dessen Lösung?

$$\dot{v}_1 = \omega\, v_2 \quad , \quad v_1(0) = 0$$
$$\dot{v}_2 = -\omega\, v_1 \quad , \quad v_2(0) = v_0$$

Aufgabe 75: Weltmodell `II` (5 Punkte)

Wir haben keine Weltregierung. Eine so vernünftige wie in **A72** ist auch so bald nicht zu erwarten. Es wird eine Eigendynamik geben. In $\boxed{\dot{N} = (G - S)N\ ,\ N(0) = N_0}$ machen wir den Faktor $G - S$ von einer pauschalen Vorratsgröße $V(t)$ abhängig (Rohstoffe, bebaubares Land, Luftsauerstoff etc.): $G - S = G_0 - S_0 + \alpha\,(V - V_0)$, $V(0) = V_0$, welche proportional zu N abnimmt: $\dot{V} = -\beta N$. Wie auch immer man $G - S$ abnehmen läßt, man kann es als Abnahme der Geburtenrate lesen, oder aber als Zunahme der Sterberate.

Mit „Zeit“ $\tau = \sqrt{\alpha\beta N_0}\,t$ und bei Übergang $N(t) = N_0 u(\tau)$, $V - V_0 = -\sqrt{\beta N_0/\alpha}\,v(\tau)$ zu den zwei neuen Funktionen u, v versammeln sich alle Konstanten in einer einzigen: $\eta = (G_0 - S_0)/\sqrt{\alpha\beta N_0}$. Das Dgl–System (zuzüglich Anfangsbedingungen) bekommt dabei die Gestalt $\boxed{u' = u\cdot(\eta - v)\ ,\ v' = u \quad , \quad u(0) = 1\ ,\ v(0) = 0}$.

Stimmt das? Welche Dgl für v allein folgt hieraus? Welche Besonderheit hat sie? Usw. Alles funktioniert, und man kommt analytisch durch bis zur Lösung $u(\tau)$.

[Empfehlung: zu jeder Hilfs– oder Teil–Dgl stets auch ihre Anfangsbedingung notieren (ER's!). Ob $\frac{1}{2+2\eta v - v^2} = \frac{1}{\omega^2 - (v-\eta)^2} = \partial_v \frac{1}{2\omega} \ln\left(\frac{\omega - \eta + v}{\omega + \eta - v}\right)$ mit $\omega := \sqrt{2 + \eta^2}$ stimmt und sogar plötzlich zu gebrauchen ist? Kennt man $v(\tau)$, so auch $u(\tau)$. Nach so vielen Gelegenheiten, sich zu verrechnen, möchte man wohl gern vergleichen: $u(\tau) = \frac{4\omega^2\, e^{\omega\tau}}{[\,(\omega-\eta)\, e^{\omega\tau} + \omega + \eta\,]^2}$. Aber hoffentlich stimmt das nicht, denn die Langzeit–Prognose fällt ersichtlich arg traurig aus.]