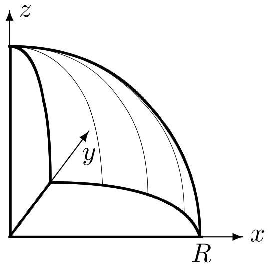
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 20**	13.05.2008

[Abgabe 20.05. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 62: Volumenintegral, Kugelkoord. (1+2=3 Punkte)



Das skizzierte Achtel (Masse M) einer Kugel (R) wurde aus einem homogenem Material hergestellt.
(a) Berechnen Sie das Volumen V in Kugelkoordinaten. Welche Massendichte ρ hat die Achtelkugel folglich?
(b) Wo liegt der Schwerpunkt $(R_1 = ?, R_2 = ?, R_3 = ?)$ des Körpers ? [Richtig, jedes dieser drei Volumenintegrale müßte zum gleichen Resultat führen. Trotzdem ausführen, weil es sich mit dem Ziel vor Augen so schön rechnet.]

Aufgabe 63: Kugelförmige Sterne: $\rho(r)$ (1+1+2=4 Punkte)

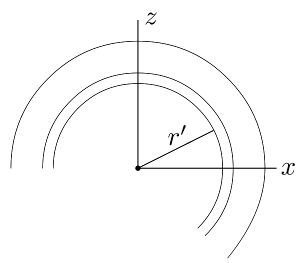
Aus der Vorlesung kennen Sie das Gravitationspotential für eine kugelförmige Massenverteilung, $V(r) = -\gamma\, m\, \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr'\, r'\, \rho(r') \left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right)$.

(a) Schreiben Sie $V(r)$ ohne Wurzeln/Beträge, d.h. als $V(r) = -\gamma\, m\, 4\pi \left(\frac{1}{r}\int_0^r \ldots + \int_r^\infty \ldots \right)$

(b) Unterstellt man der Erde konstante Dichte, so daß $\rho(r' \le R) \approx \rho_0$, $\rho(r' > R) = 0$ ist, und begibt sich in ihr Inneres ($r < R$), so folgt aus (a) der dortige Potentialverlauf $V_{\text{innen}}(r) = ?$

(c) Die Ursache–Antwort–Beziehung in (a) läßt sich angeblich nach der Ursache $\rho(r)$ auflösen, indem man den Operator $\Delta_r := \frac{1}{r}\, \partial_r^2\, r$ auf $V(r)$ anwendet. Stimmt's? $\Delta_r V(r) = ?$

Aufgabe 64: Superposition (3 Punkte)



Stellen Sie sich die Erde (E) aus Kugelschalen aufgebaut vor.

Das Potential einer Kugelschale (KS; Radius R) der Masse M besteht aus zwei Teilen und lautet (Skizze!)

$$V_{\text{KS}}(r < R) = -\gamma m M/R \ , \ \ V_{\text{KS}}(r > R) = -\gamma m M/r \ .$$

Schneiden wir nun aus der Erde (Radius R_{E}, konstante Massendichte ρ) die Schale zwischen r' und $r' + dr'$ heraus (Volumen? Masse?), so geht deren Potential dV aus V_{KS} per Ersetzung $M \to ?$, $R \to ?$ hervor. Addition dieser dV's, für $R_{\text{E}} < r$, muß $-\gamma m M_{\text{E}}/r$ geben. Ist es so? Und aus Addition der dV's für $r < R_{\text{E}}$ folgt $V_{\text{innen}}(r) = ?$ [s.63(b)]

Aufgabe 65: Trompete (1+1+1+1=4 Punkte)

Betrachten Sie den Rotationskörper, der sich bei Rotation der Kurve $f(x) = \frac{1}{x}$ um die x–Achse ergibt, wobei $1 \le x \le \infty$ ist ("unendlich lange Trompete"). Dieser Rotationskörper hat einige verblüffende Eigenschaften:
(a) Berechnen Sie die Schnittfläche mit der x-y Ebene.
(b) Berechnen Sie die Gesamtoberfläche.
(c) Berechnen Sie das Gesamtvolumen.
(d) Wieviel Farbe bräuchte man, um die Trompete zu füllen? Und wieviel Farbe, um ihre Oberfläche bzw die x-y-Schnittfläche anzustreichen? Macht das Sinn?! Diskutieren Sie dieses paradoxe Ergebnis. [Hinweis: Google / Wikipedia → "Gabriel's horn" oder "Torricelli's trumpet"]