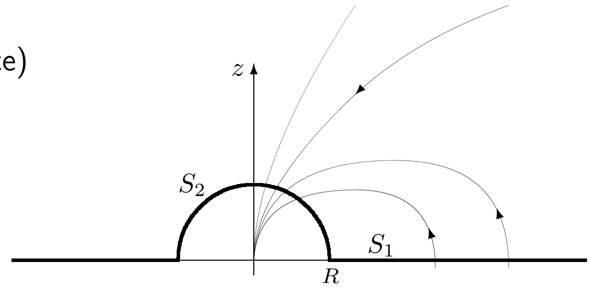
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 19**	06.05.2008

[Abgabe 13.05 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 59: Strom I durch Fläche (2+2=4 Punkte)



Überall in der oberen Atmosphäre möge Ladung fließen, mit Stromdichte $\vec{\jmath} = \alpha(r^2\vec{e}_3 - 3z\vec{r})/r^5$. Weil sich dabei nirgends Ladung anhäuft [später: weil „$\nabla\cdot\vec{\jmath} \equiv 0$"], sollte der Strom I_S durch die gesamte Fläche $S = S_1 + S_2$ schlicht Null sein.

(a) Rechnen Sie zuerst den Anteil I_1 durch die R–Kreis–gelochte (und ansonsten unendliche) xy–Ebene aus (per Flächenintegral, „außen" ist oben).

(b) Werten Sie den Anteil I_2 durch die R–Halbkugel–Oberfläche S_2 („außen" ist außen) explizit als Oberflächenintegral aus. [günstig: Polarkoordinaten $\vec{r}(\rho,\varphi) = (\rho\, c,\ \rho\, s,\ \sqrt{R^2-\rho^2}\,)$]

Aufgabe 60: Flächenintegral (2+1+1+2=6 Punkte)

Die Erde (Radius R) ist eine Scheibe und liegt in der xy–Ebene (Zentrum = Ursprung). Ihre Masse M ist homogen verteilt, d.h. die konstante Masse/Fläche der Scheibe ist $\sigma = ?$ Eine Raumsonde (m) bei $\vec{r}$ spürt den negativen Gradienten des Potentials V der Scheibe.

(a) Schreiben Sie $V(\vec{r})$ als ebenes Flächenintegral auf, und zwar in Polarkoordinaten. [Vorsicht, davon gibt's 2 Sorten: ρ' und φ' grasen die Scheibe ab, $\vec{r} = (\,\rho\cos(\varphi)\,,\,\rho\sin(\varphi)\,,\,z\,)$ positionieren die Sonde.]

(b) Aus Symmetriegründen kann V kann nicht von φ abhängen. Auch das bei (a) notierte Doppelintegral sollte diese Unabhängigkeit zeigen. Wie gelingt das ?

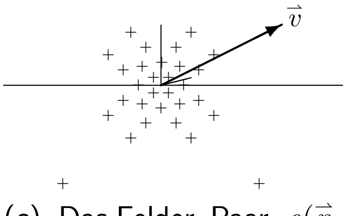
(c) Anschaulich ist auch klar, auf welchen asymptotisch führenden Term $V_\infty = ?$ sich V bei $r \to \infty$ reduzieren muß. Folgt auch dies aus Ihrem $\int\!\!\int$ von (a) ?

(d) Bleibt die Sonde auf der z–Achse, so sind die Integrale für $V(0,0,z)$ ausführbar. Welcher Term bleibt übrig (V–Konstante weglassen !), wenn z so klein wird, daß man gegen 1 kein $O(z^2/R^2)$ mehr wahrnehmen kann ?

[Bei Integrand $\sqrt{1-\mathrm{trig(x)}}$ ist oft Substitution $\mathrm{trig}(x) = u$ einen Versuch wert (trig = eine der trigonometrischen Fktn).]

Aufgabe 61: Meteorologie per Integral (2+2+1=5 Punkte)

Gewitterwolke. Nach Blitzschlag fliegt eine positiv geladene Wolke mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (\,v_1\,,\,0\,,\,v_3\,)$ nach rechts–oben weiter ($v_3 > 0$). Ladungs– und Stromdichte erfüllen den Raum: $\rho(\vec{r},t) = \left(b/\sqrt{\pi a^2}\right)^3 \exp\left[-(\vec{r}-\vec{v}t)^2/a^2\right] \quad , \quad \vec{\jmath}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}$.



(a) Welche Dimensionen haben die Konstanten a und b ? Welche Gesamtladung $Q = \int\!\mathrm{dx}\int\!\mathrm{dy}\int\!\mathrm{dz}\,\rho$ hängt zur Zeit $t=0$ im Raum ? [Per Verschiebetrick wird klar, daß auch zu jeder späteren Zeit diese Gesamtladung Q vorliegt; Nützliches Integral (s. Skript S.67): $\int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$]

(b) Welcher Strom $I(t)$ — als ebenes Flächenintegral auszuwerten — fließt durch die Ebene $z=0$?

(c) Das Felder–Paar $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{\jmath}(\vec{r},t)$ muß $\partial_t\rho + \partial_x j_1 + \partial_y j_2 + \partial_z j_3 = 0$ (die sog. *Kontinuitätsgleichung*) erfüllen. Ist es so? [beim Ableiten nach t ist $\vec{r}$ fest, beim Ableiten nach x sind t, y, z fest usw.]