Einf. i. d. Meth. d. theor. Physik II → EMTP II

YS, E6-118 (Di 10-12:30 u.n.V.)

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp2

Orga

Vorl Di 8.15-9.00, 9.10-9.55 (H6)

in Pause: Ü-Blatt holen

Ü-Liste eintragen (nur heute)

Übungen Do. 8-10, 10-12

Tutoren: s. Overhead

vor Vorl: Ü-Lsn in Kasten

Regeln: (50%) Ü-Pkte + akt Mitarbeit ⇒ Ü-Schein

Ü-Schein + (eine) Klausur best ⇒ Schein

↳ alt OK ↳ 21.7.08, 6.10.08

EMTP I - Klausur: (Statistik: 80% bestanden; Gratu !!)

Besprechung / Fragen diese Woche in Ü → evtl. Aufg.zettel mitbringen

(neue Hörer? → als Wdh der EMTP I)

Ü-Schein: Pause

KI-Erfolg nicht EMTP II-Voraussetzung.

EMTP II : nicht schwerer als I. schöner! interessanter!

Integrale, krumme Koordinaten, δ

Differenzial glgn

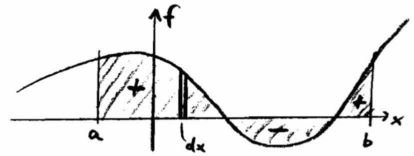
Felder, Integralsätze

Fourier-Trafo

LIT → s. Web; Schulz PB

6. Integrale (+ deren Gebrauch i.d. Physik)

6.1. Gewöhnliche Integrale



Die so gezählte Fläche ist $\{\text{lin. Op.}\}f(x)$, denn (u.a.) $\{\}(-f) = -\{\}f$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{array}\right) = \underset{\int}{\underline{\lim \sum}} \left(dx \cdot f(x)\right) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$\int dx :=$ über alle x, d.h. $\int dx\, f := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f$, $\int d\varphi := \int_{(2\pi)} d\varphi$

Dimension: $[\int dx\, f] = [x][f]$, $[a] = [b] = [x]$

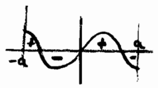
$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

oder $f = \partial_x(\ldots\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Beispiele:

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \text{const}_x = (b-a)\cdot \text{const}_x \qquad \left(\int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varepsilon f(a)\right)$$



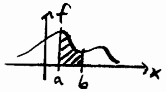
f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$

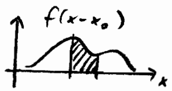
f gerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$

$$\int_a^b dx\, (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

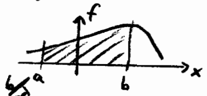
Tricks: Verschieben

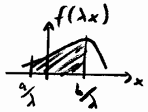




$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} f(x) \to f(x-x_0) \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0 \end{array} \right)\right)$$

Skalieren



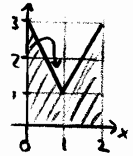


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x \to \lambda x \\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda \end{array} \right)\right)$$

Anwendungs-Beispiel

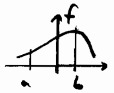
$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 dx\, \left(2|x-1|+1\right) \quad , \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^{1} dx\, \left(2|x|+1\right) \quad , \quad x \to \tfrac{1}{2}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx\, \left(|x|+1\right) \quad , \quad \text{gerade Fkt} \\ &= \int_0^2 dx\, \left(|x|+1\right) = \int_0^2 dx\, (x+1) \quad , \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^{1} dx\, (x+2) \quad , \quad x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

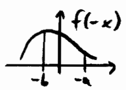
((einfacher Check hier: zeichnen



$f \to 2$, $J = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

Spiegeln



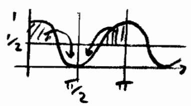


$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{-b}^{-a} dx\, f(-x) = -\int_{-a}^{-b} dx\, f(-x) \qquad ((\hat{=} \text{ Skalieren}, \lambda = -1))$$

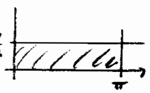
$\text{trig}^2 \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^\pi dx \begin{Bmatrix} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \\ \overset{\shortparallel}{1-c^2} \end{Bmatrix} = \int_0^\pi dx \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{2} \quad ,$$

denn:



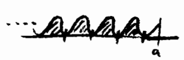
$= \frac{1}{2}$



weil $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \sin^2(x) = \tfrac{1}{2} \quad ,$$

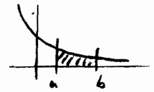
denn $\frac{1}{N\pi + O(1)} \cdot \left(N\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \to \frac{1}{2}$



$\int \to$ dimensionslos

z.B.: $\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\int_0^{\omega t} dt\, f(t)$, $t \to \frac{1}{\omega}t$

$\int$ aus Σ(Scheibchen) z.B.:



$$\begin{aligned} \int_a^b dx\, e^{-x} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)}{N}\, e^{-(a+n\frac{b-a}{N})} \end{aligned}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N}\, e^{-a}\, \frac{1 - e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + O(1/N^2)$

$$= e^{-a}\left(1 - e^{-b+a}\right) = e^{-a} - e^{-b}$$

$$\left(\left(\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1 \right)\right)$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a} \qquad ((\text{gilt das immer? s.u.}))$$

"Hauptsatz"

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

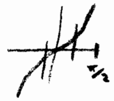
Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\begin{aligned} \partial_b \int_a^b dx\, f(x) &= \partial_b F(b) \\ \int_a^b dx\, f(x) &= F(b) + C \\ b \to a: \quad 0 &= F(a) + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$

Kommentare zum Hauptsatz

- 1 hilft nur, falls man $f = \partial_x F$ lösen kann
  (($f = \sin(x^2) = \partial_x\,(???)$))
- 2 warum er gilt: $\int_a^b dx\, \frac{dF}{dx} = F$-Zunahme ab $F(a)$
- 3 Anwendg: $\int_a^b dx \;\text{////} = \int_a^b dx\, \partial_x [\,??\,] = [\;]_a^b = [\;]_{x=b} - [\;]_{x=a}$
- 4 Wunschtabelle $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.
  wenn jedoch (s. Bronstein etc.) „$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$",
  dann lese dies als Tabelle (nicht als Gleichg: $\mathcal{C}$?!)
- 5 F in Tabelle gefunden
  → zitieren, z.B. [Bronstein, 57]
  → Probe, also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden
  ((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))
- 6 Bsp: $J_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx\, \tan(x)$



ungerade!

$= \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx\, \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$= \left[-\ln(\cos(x))\right]_{-\pi/6}^{\pi/4}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$= \ln(\sqrt{2}) - \left[-\ln\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$

- 7 $\int_a^\infty dx\, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f$: wenn endlich, dann: „es existiert".
  Bsp: existiert $\int_0^\infty dx\, \big(\ln(1+e^x) - x\big)$?
  $\underbrace{\ln(1+e^x) - x}_{=\ln(e^{-x})\,\ldots} \to = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!
- 8 „Kandidaten-Methode":

$J_2 = \int_0^1 dx\, \arctan(x) = \int_0^1 dx\, \partial_x [\,?\,]$

$\partial_x\, x\cdot\arctan(x) = \arctan(x) + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=\partial_x(?)}$, $\partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$

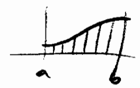
$\Rightarrow [\,?\,] = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ (($\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$ ✓))

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration!

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar{h}$, Verallg.:



$\bar{f} = \frac{\Sigma f\text{'s}\; dx}{\text{Anzahl}\; dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$

$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2$, etc.

Eigenschaften: $\overline{\alpha f + \beta g} = \alpha\bar{f} + \beta\bar{g}$, $\bar{1} = 1$

Schwankung: $\Delta f = \sqrt{\overline{(f-\bar{f})^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\overline{f\bar{f}} + \bar{f}^2} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}$

Bsp harm. Oszi., $x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (Periode), $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (($m\ddot{x} = -kx$ $= -\partial_x \frac{k}{2}x^2$))

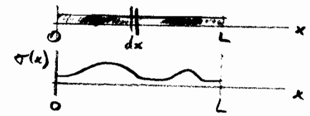
$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A\cos(\omega t) = 0$

mittl. kin. E $\rightsquigarrow \bar{T} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{m}{2}\big(\underbrace{A\omega\sin(\omega t)}_{\to 1/2}\big)^2 = \frac{m}{4}\omega^2 A^2$

mittl. pot. E $\rightsquigarrow \bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{k}{2}\big(A\cos(\omega t)\big)^2 = \frac{k}{4}A^2 = \bar{T}$

$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{2}{k}\bar{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}}A$

$\sigma(x)$ Massendichte



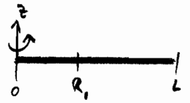
$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$

$M = \sum_a m_a \longrightarrow M = \int_0^L dx\, \sigma(x)$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac{1}{M}\sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\, x$ Schwerpkt

Erinnerg. (§4): Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{I}_{\text{Trägheitstensor}}\,\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{Winkelgeschw.}}$

starre Körper, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{33} \end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2)$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\,\omega \end{pmatrix}$$

$$I_{33} = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \quad \longrightarrow \quad \overset{L}{I_{33}} = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$$ Achse durch Ursprung

$$= \int_0^L dx\, \sigma(x) \left[(x-R_1)^2 + 2R_1(x-R_1) + R_1^2 \right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + M R_1^2$$ „Satz v. Steiner"

Achse durch Schwerpkt.

<u>Superposition</u> Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec{r}_a$ ziehen m bei $\vec{r}$ an:

$$V(\vec{r}) = \sum_a \left(- \frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \right)$$

dünner Stab auf x-Achse: $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

$\rightsquigarrow$ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

<u>1D Newton, $K(t)$</u> $\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m} K(t) \,,\; v(t_0) = v_0}$

(A) Integral <u>sinnvoll</u>, wenn
- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will.

$$\int_{t_0}^{t} dt'\, \partial_{t'} v(t') = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} dt'\, K(t')$$
$$v(t) - v(t_0) =$$

(B) Integral <u>nicht sinnvoll</u>, wenn $K(t)$ aufleitbar ist:

$$\boxed{\dot{v} = \alpha\omega \cos(\omega t) \,,\; v(t_0) = v_0}$$
$$= \alpha\, \partial_t \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow v = \alpha \sin(\omega t) + C$$
$$v_0 = \alpha \sin(\omega t_0) + C \quad \Rightarrow C\,;$$

<u>1D Newton, $K(x)$</u> (evtl. unlösbar)

$$m\ddot{x} = K(x) = -\partial_x V(x) \qquad \| \cdot \dot{x}$$
$$\partial_t \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) = -\partial_t V(x(t))$$
$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x)$$
$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$ ((immerhin eine Ableitung weniger!))

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (*)$$

(B): $\partial_t [\,?\,] = C \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$, $C = \ldots$, nach x auflösen

(($[\,?\,]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}$ bzgl. x))

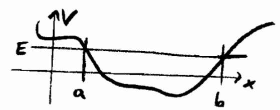
(A): ((finde $[\,?\,]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:))

Strategie: $(*) \cdot dt$ $(\dot{x}\,dt = dx)$ und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t} dt' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Periode T ?



$$T = 2 \int_a^b dx \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

<u>Arbeit</u> (1D) := Kraft · Weg
$= \sum (d\text{Weg}) \cdot$ Kraft
$=$ pos., wenn Weg in Richtung Kraft
$=$ dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$$A = \int_a^b dx\, K(x) = -\int_a^b dx\, \partial_x V(x)$$
$$= V(a) - V(b)$$

6.3. Integrations-"Methoden"

((≙ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x(uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx\, uv'$$

Bsp: $I = \int_0^1 dx\, \underbrace{2x}_{u'}\, \underbrace{\ln(x)}_{v}$ $\quad u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

$$= \underbrace{\left[x^2 \ln(x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 dx\, x = -\tfrac{1}{2} + 0$$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial}_x$:

$$= \int_0^1 dx\, \ln(x)\, \partial_x x^2 = -\int_0^1 dx\, x^2 \partial_x \ln(x)$$

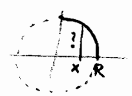
$$= -\int_0^1 dx\, x = -\tfrac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a,b), $\Rightarrow t = t(x)$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt}\, f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) – Fläche



$$F_{(R)} = 4\int_0^R dx\, \sqrt{R^2 - x^2}$$

setze $x = R\sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\, R\cos(\varphi)\, R\sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser ? aus $U = 2\pi R$:  $\to$  , $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

Bsp 2

$$I = \int_0^1 dx\, 2x \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t, \ \dot{x} = e^t$

$x_u = 0$ bei $t = -\infty$, $x_o = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^0 dt\, e^t\, 2e^t\, t \qquad \text{((nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1 \text{))}$$

$$= -2\int_{\infty}^0 dt\, e^{-2t}(-t) = -2\int_0^\infty dt\, t e^{-2t} \qquad ((t \to \tfrac{t}{2}))$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty dt\, \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty dt\, t(-\partial_t)e^{-t} = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty dt\, e^{-t} = -\tfrac{1}{2} \quad (\text{s.}\downarrow)$$

Bsp 3 (("uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche))

$$\int_0^\infty dx\, \underbrace{e^{-x}}_{=t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt\,\left(-\tfrac{1}{t}\right)t = \int_0^1 dt = 1$$

... als ∂_α von ... (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \Big[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{= 1/\alpha}\Big]_{\alpha=1} = \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right]_{\alpha=1} = n!$$

$$\left(\left((-\partial_\alpha)\tfrac{1}{\alpha} = +\tfrac{1}{\alpha^2}\,,\ (-\partial_\alpha)\tfrac{1}{\alpha^2} = \tfrac{2}{\alpha^3}\,, \dots \right)\right)$$

... als Parameter-abhängig (vgl. Übung, Aufgabe 45)

$$\partial_\beta\ \ -\beta\partial_\beta \ln\left(\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) = -\beta\partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^x+1}\right)$$

$$= -\beta\partial_\beta\left[-2\ln\beta + \ln(\int \dots)\right] = 2$$

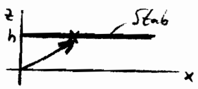
6.4. Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

Integral = Summe. also

$$\int_a^b dx\, \vec{f}(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x),\ \int_a^b dx\, f_2(x),\ \dots \right)$$

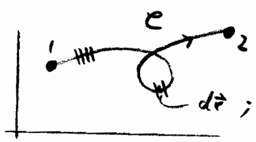
Bsp:



$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\,(x,0,h) = (R_1, 0, h)$$

Schwerpkt.

Kurvenintegral



$d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$

"C gegeben" $=$ $\vec{r}(t)$, t_1, t_2.

Raumkurve

($\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec{r}_1$-Angabe)

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von $C = \int_C ds = \int_1^2 ds$

$M = \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})$	Draht-Gesamtmasse
$M\vec{R} = \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})\,\vec{r}$	Draht-Schwerpkt
$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec{r}\,')\,\frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$	Draht-Gravi-Pot.
$A = \int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{K}$	Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec{K}$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

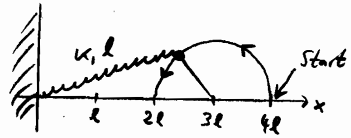
$d\vec{r} = dt\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$, bzw. $ds = dt\cdot|\dot{\vec{r}}|$

z.B. $A = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\vec{r}}\cdot\vec{K}(\vec{r}(t))$

folgendes "Rezept" nützlich:

"$\int_C$ - Fahrplan"	am Bsp Kreisumfang
1. Größe, d.h. $\int_C$-Art	$U = \int_{Kreis} ds$
2. spezif. C	$\vec{r}(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0)$
3. t_1, t_2	$t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$
4. $\dot{\vec{r}} =: \vec{v}$, ggf v bilden t-Integral	$\vec{v} = R(-s, c, 0)$ $U = \int_0^{2\pi} dt\ R$
5. $\vec{r}(t)$ in Integrand einsetzen	— entfällt —
6. ggf. Skalarprod. ausführen	— entfällt —
7. gew. Int. auswerten	$U = R\cdot 2\pi$

Bsp: Mausefalle



Arbeit A als Kurvenintegral!
(Fahrplan-Illustration)

((vorweg: es muß $A = V_{Start} - V_{Ende}$ herauskommen

$$= \frac{\kappa}{2}(4\ell-\ell)^2 - \frac{\kappa}{2}(2\ell-\ell)^2 = \frac{\kappa}{2}\ell^2(9-1) = 4\kappa\ell^2\ ))$$

1. $A = \int_C d\vec{r}\cdot\vec{K}(\vec{r})$, $\vec{K}(\vec{r}) = \kappa\left(\frac{-\vec{r}}{r}\right)(r-\ell)$

$\vec{e}_{m\to Haken}$

2. C: $\vec{r}(t) = \ell(3+\cos(t), \sin(t))$
3. $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$
4. $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \ell(-s, c)$

$A = \int_0^\pi dt\ \ell(-s,c)\cdot\kappa(-\vec{r})\left(1-\frac{\ell}{r}\right)$

5. $r = |\vec{r}| = \ell\sqrt{9+6c+c^2+s^2} = \ell\sqrt{10+6c}$

$A = \ell^2\kappa\int_0^\pi dt\ \underbrace{(-s,c)\cdot(-3-c,-s)}_{3s+\cancel{sc}-\cancel{sc}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{10+6c}}\right)$

6.

7. $= 3\ell^2\kappa\int_0^\pi dt\left(\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{10+6\cos(t)}}\right)$

$= \partial_t\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\sqrt{10+6\cos(t)}\right]$

$= 3\ell^2\kappa\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{4}+1-\frac{1}{3}\sqrt{16}\right) = 4\ell^2\kappa$ ✓

5 $\int_{\mathcal{C}}$ - Arten: $\int_{\mathcal{C}} ds \begin{Bmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix} \text{Skalar} \\ \text{Vektor} \end{matrix}$, $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \begin{Bmatrix} \phi \\ \cdot \vec{A} \\ \times \vec{A} \end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix} \text{V.} \\ \text{S.} \\ \text{V.} \end{matrix}$

manchmal geometrisch auswertbar, z.B.:

$\vec{E} = \alpha\, \vec{e}_3 \times \vec{r}$, 

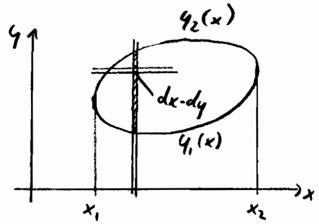
$\oint_{\text{Kreis}(R)} d\vec{r} \times \vec{E} = \vec{0}$ (weil $d\vec{r}$ stets $\parallel \vec{E}$)

$\oint_{\text{Kr.}(R)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 2\pi R \cdot \alpha R$ (weil $d\vec{r} \cdot \vec{E} = ds \cdot |\vec{E}| = ds \cdot \alpha R$)

oft hilft, $\mathcal{C}$ geschickt zu legen!

ebenes Flächenint.

$\phi(x,y) = \dfrac{\text{etwas}}{\text{Fläche}}$ ← Masse, Heu, …



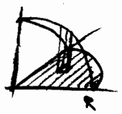
gegeben, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{gesamtes} \\ \text{etwas}\end{matrix}\right\} = \int_F d^2r \cdot \phi(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \phi(x,y)}_{\text{Streifen-etwas}}$$

ausrechnen

((Randkurve? Immer? ))

Bsp Kugelvolumen



$x_1 = 0,\ x_2 = R,\ y_1(x) \equiv 0,\ y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\phi = \text{Höhe} = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}$

$$V_R = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad , y \to \sqrt{R^2-x^2}\, y$$

$$= 8 \cdot \int_0^R dx\, (R^2 - x^2) \underbrace{\int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}}_{= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2(\varphi) = \pi/4} \qquad y = \sin(\varphi),\ \frac{dy}{d\varphi} = \cos(\varphi)$$

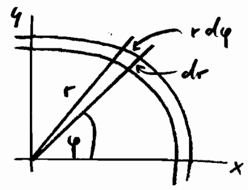
$x \to Rx$

$$= 2\pi R^3 \underbrace{\int_0^1 dx\, (1 - x^2)}_{= 1 - [\frac{1}{3} - 0] = \frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

im letzten Bsp: kugeliges kartesisch ?!

brauchen "runde" Koordinaten!

Polarkoordinaten

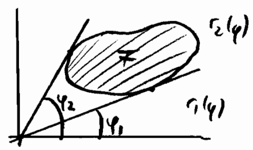


$d^2r = dr\, r\, d\varphi$

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n \cdot \pi$

((φ in $(0, 2\pi)$: $n = 1 + \Theta(x) - 2\Theta(x)\Theta(y)$))



$$\int_F d^2r\, \phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr\, r\ \phi(r, \varphi)$$

Test an Kreisfläche ($\overset{?}{=} \pi R^2$)

$\phi = 1$,  , $4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} R^2$ ✓

Bsp Kugelvolumen

$$V_R = 8 \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\pi/2} \int_0^R dr\, r \sqrt{R^2 - r^2} \qquad r \to Rr$$

$$= 4\pi R^3 \int_0^1 dr\, \underbrace{r\sqrt{1-r^2}}_{= \partial_r \left[\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^2)^{3/2}\right]}$$

$$= 4\pi R^3 \left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \ ✓$$

Bsp Galaxie mit $\dfrac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} =: \rho = \rho_0\, e^{-r^2/a^2}$, $M = ?$

$$M = \int_{\substack{\text{ganze} \\ \text{Ebene}}} d^2r\, \rho = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/a^2} \quad , r \to ar$$

$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2 \int_0^\infty dr\, \underbrace{r\, e^{-r^2}}_{= \partial_r \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]}$$

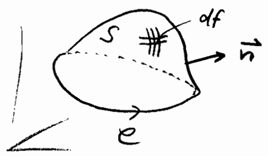
$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2 \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \rho_0\, \pi a^2$$

Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\varrho_0 = 1$, $a = 1$ ist

$$\pi = \int d^2r\, e^{-r^2} = \int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2} = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad , \quad \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Oberflächen-Int.



gegeben: S, Rand $\mathcal{C}$ mit Richtung,

$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$.

Sei $\vec{n}$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

$\Rightarrow$ kann $df \cdot \vec{n} =: d\vec{f}$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{Bmatrix}$, $\int_S d\vec{f} \begin{Bmatrix} \phi \\ \cdot \vec{A} \\ \times \vec{A} \end{Bmatrix}$

Anwendungs-Bsp: Strom durch Fläche $S =: I_S$

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec{j}$

$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$, $\vec{j} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}\, \vec{e}$

nur $j_{\perp S} = j_{\parallel \vec{n}}$ erzeugt Strom $df \cdot j_{\parallel \vec{n}} = df\, (\vec{j} \cdot \vec{n}) = d\vec{f} \cdot \vec{j}$

$\Rightarrow \quad I_S = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})$

Ausrechnen ?! S gegeben $\Rightarrow$ finde $\vec{r}(s,t)$

kann $\partial_s \vec{r} =: \vec{r}\,'$ und $\partial_t \vec{r} =: \dot{\vec{r}}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec{f}$:

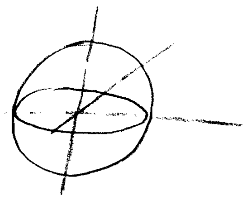
$d\vec{r}_1 = ds\, \vec{r}\,'$, $d\vec{r}_2 = dt\, \dot{\vec{r}}$

$d\vec{f} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = ds\, dt\, \vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}$

$$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\, dt\, \underbrace{(\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{j}}_{\text{von } s,t \text{ abhängig}}$$

$\Rightarrow$ habe auf ebenes Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$$S_R = 2 \cdot \int_{S_{\text{oben}}} df$$

s,t : Polarkoord. ϱ, φ in xy-Ebene ,

$\vec{r}(\varrho,\varphi) = \left(\varrho \cos(\varphi),\ \varrho \sin(\varphi),\ \sqrt{R^2-\varrho^2} \right)$

$S_R = 2 \int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi\ |\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}| \cdot \{\phi = 1\}$

$\vec{r}\,' = \partial_\varrho \vec{r} = \left(c, s, -\frac{\varrho}{r}\right)$, $\dot{\vec{r}} = \partial_\varphi \vec{r} = (-\varrho s, \varrho c, 0)$

$\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}} = \left(\frac{\varrho^2 c}{r}, \frac{\varrho^2 s}{r}, \varrho \right) \quad \left(= \frac{\varrho}{r}\vec{r} \right)$

$|\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}| = \sqrt{\frac{\varrho^4}{r^2} + \varrho^2 \frac{r^2}{r^2}} = \frac{\varrho R}{r}$

$= 2 \cdot 2\pi\, R \int_0^R d\varrho\, \underbrace{\frac{\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}}_{= \partial_\varrho\left[-\sqrt{R^2-\varrho^2}\right]}$

$= 4\pi R^2$

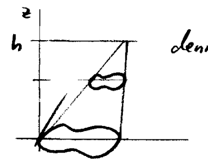
Test Kugelvolumen V_R

Könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, $\sim$ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int \text{Pyr.-Vol.} = \int df \cdot R \cdot \lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $= \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe



denn: $V_{F,h} = \int_0^h dz \cdot F \cdot \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{F}{h^2}\left[h^2 z - h z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h$

$= \frac{1}{3} F h \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}$

$\frac{4\pi}{3} R^3 \overset{?}{=} \frac{1}{3} \cdot R \cdot 4\pi R^2$ ✓✓

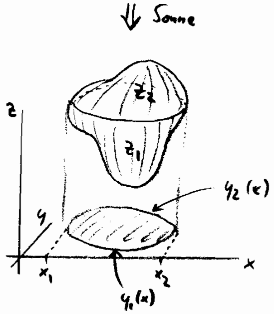
((Welt nicht nur aus Drähten, Hüten usw — auch aus Kartoffeln !))

Volumenintegral

gegeben: $\frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}} =: \phi(x,y,z)$

und V, d.h. $x_1, x_2, y_1(x), y_2(x)$

und $z_1(x,y), z_2(x,y)$.



$dx\,dy\,dz =: d^3r$

$\left.\begin{matrix}\text{Gesamtes}\\ \text{etwas in } V\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r\,\phi$

Auswertung kartesisch $= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\ \phi(x,y,z)$

↳ Würfel in Säule bei x,y

↳ Σ Säulen in Scheibe bei x

↳ Σ Scheibchen

wenn $\rho(\vec{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$, dann (gesamte Ladung in V) $= Q_V = \int_V d^3r\,\rho(\vec{r})$

wenn $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Vol.}}$, dann

$$\boxed{\begin{array}{l}\left.\begin{matrix}\text{Vol.}\\ M\\ M\vec{R}\\ I_{jk}\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r \left\{\begin{matrix}1\\ \rho\\ \rho\cdot\vec{r}\\ \rho(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\end{matrix}\right.\\ V(\vec{r}) = -\gamma m \int_V d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\end{array}}$$

4 Fragen

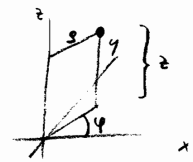
1) $V_R \overset{?}{=} \int_V d^3r \cdot 1 = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, $\exists A$.

2) obige Formeln ohne V-Index schreiben, d.h. $\int$ über ganzen Raum? $\exists A$, $\rho := 0$ außerhalb V.

3) Wie folgen $\int_{Bauch}$, $\int_{Hut}$ aus $\int_V$? $\Rightarrow$ s. § 6.6

4) 3D "runde" Koord.? $\Rightarrow$ jetzt, § 6.5.

6.5. Krummlinige Koord.



Zylinderkoord.: ρ, φ, z

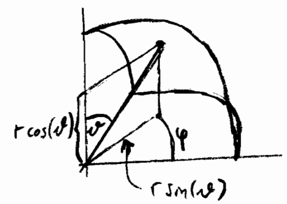
$x = \rho\cos(\varphi)$

$y = \rho\sin(\varphi)$

$z = z$

$d^3r = \underline{d\rho}\ \underline{\rho}\ d\varphi\ \underbrace{dz}_{\text{Länge}^3 \checkmark}$ = "Balkon-Vol. am Wasserturm"

Kugelkoord.: r, ϑ, φ



$x = r\sin(\vartheta)\ \cos(\varphi)$

$y = r\sin(\vartheta)\ \sin(\varphi)$

$z = r\cos(\vartheta)$

$d^3r \overset{!}{=}$ Höhe $\cdot$ (NS-Breite) $\cdot$ (W-O Breite)

$\overset{!}{=} dr \cdot r\,d\vartheta \cdot r\sin(\vartheta)\,d\varphi$

$= dr\ r^2 \underbrace{d\vartheta\,\sin(\vartheta)\,d\varphi}_{\equiv\, d\Omega\ =\ \text{Haus-Grundfläche}/r^2}$

→ "Haus-Grundfläche"

Bsp $V_R \overset{!}{=} \int_{Kugel(R)} d^3r \cdot 1$

$= \int_0^R dr\,r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\,\sin(\vartheta)}_{2} \underbrace{\int_{(2\pi)} d\varphi}_{2\pi}$

(($\Rightarrow \int d\Omega \overset{!}{=} 4\pi$ = der max. Raumwinkel $\overset{!}{=} S_R/R^2 \Rightarrow S_R = 4\pi R^2$ ✓✓))

$= \frac{4\pi}{3} R^3$ ✓✓

Gravi-Pot. bei kugelförmiger Massenverteilung $\rho(r)$:

$$V(\vec r) = -\gamma m \int d^3r' \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

ohne Pfeil

Nenner $= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r\vec r\,'}$

$$= -\gamma m \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{(2\pi)} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \frac{1}{\sqrt{}}$$

während $\vec r\,'$-Integration ist $\vec r$ fest.

$\Rightarrow$ orientiere $\vec r\,'$-Kugelkoord. um $\vec r$ als "z-Achse"

$\Rightarrow$ $\vec r\vec r\,' = rr'\cos(\vartheta')$

$$= -\gamma m\, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta' \frac{\sin(\vartheta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\vartheta')}}$$

generell:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) f(\cos(\vartheta)) = \int_{-1}^1 du\, f(-u) = \int_{-1}^1 du\, f(u)$$

Subst. $u = -\cos(\vartheta)$

$du = d\vartheta \sin(\vartheta)$

$$= -\gamma m\, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'u}} \right. = \partial_u \frac{1}{rr'} \sqrt{} \left. \right)$$

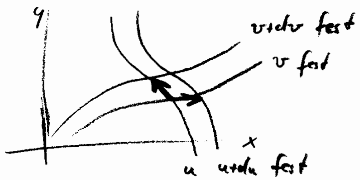
$$= -\gamma m \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right]$$

Wurzel ziehen? Vorsicht! (Beträge)

Jacobi-Determinante

allg. krumme Koord., hier 2D ((denke an Polar Koord.)):

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}\right\} \vec r(u,v)$$



$d^2r = |d\vec r_1 \times d\vec r_2|$

mit $d\vec r_1 = du\, \partial_u \vec r$

und $d\vec r_2 = dv\, \partial_v \vec r$.

$$\begin{aligned} d^2r &= du\,dv\, |(\partial_u x, \partial_u y, 0) \times (\partial_v x, \partial_v y, 0)| \\ &= du\,dv\, |(0, 0, (\partial_u x)\partial_v y - (\partial_u y)\partial_v x)| \\ &= du\,dv \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Det.}} \right| \end{aligned}$$

$$\left(\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &d^2r = du\,dv\, |J| \\ &\text{mit } J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{aligned}}$$

Bsp Test mit Polarkoord: $u = r$, $v = \varphi$

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$

$J = \begin{vmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{vmatrix} = r$ ✓

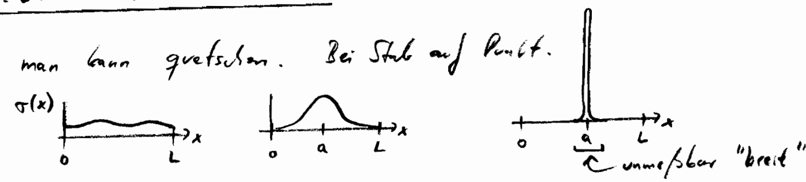
Bsp Test mit Kugelkoord: ... $d^3r = du\,dv\,dw\,|J|$

... $J = |\vdots| = r^2\sin(\vartheta)$ ✓

Durchatmen! bisher: anstrengend!
jetzt: einfach! und schön...

6.6. Delta-Funktion (der Physiker)

man kann quetschen. Bei Stab auf Punkt.



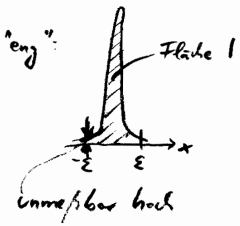
M bleibt konstant. $\int_0^L dx \frac{\sigma(x)}{M} = 1$

$\frac{\sigma(x)}{M} \to \delta(x-a)$

1. Def.

$\delta(x) :=$ jede unmeßbar eng bei $x=0$ konzentrierte Fkt mit $\int dx\, \delta(x) = 1$

"eng":



Bemerkung: "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.

nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.

man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,

lediglich sieht man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

2. Def. $\boxed{\begin{array}{l}(\text{"definierende Eigenschaft"}) \\ \int dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)\end{array}}$

((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

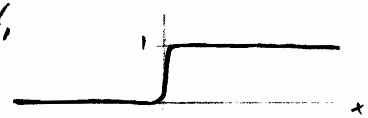
Bem.: Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

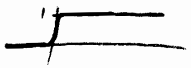
3. Def. $\boxed{\delta(x) := \partial_x \Theta(x)}$

wobei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist,

also eine in ε-Bereich von

0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \Theta(x)$

∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow$ $\delta(x) = \partial_x \Theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\Theta(x)$:

$b > a$, $\int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \Theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$

Test via Part. Int. $\quad u' \quad v \quad u = F(x) \quad v' = \delta(x-a)$

$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) = F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$

"$\Theta(0) = ?$" — kranke Frage!

δ-Darstellungen

- $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int rhs = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x \to \varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

(("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$" $\Rightarrow$ $1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{-\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

- $\Theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

- $\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi} \int dx\, \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{= \pi,\ \text{später} \ldots\ \text{((s.u.))}}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \left(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i \sin(kx) \right)$ weil ungerade, Euler

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$

- $\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\delta(x) = \partial_x (\,\cdot\,) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix} \right)$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left(e^{ikx - \varepsilon k} + \text{c.c.} \right)$

denn $= \partial_k \frac{e^{ikx - \varepsilon k}}{ix - \varepsilon}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx)$, $e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon |k|}$

$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\varepsilon |k|} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right)$ weil ungerade

$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx}\, e^{-\varepsilon |k|}$ $\Leftarrow$ Fourier! (später)

((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon |k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\ldots$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\varepsilon |x|}$ $\overset{\varepsilon \to 0^+}{}$, $\partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon |x|} = 2 \int_0^{\infty} dx\, \frac{1}{2} \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right) e^{-\varepsilon x} = \frac{2\varepsilon}{k^2+\varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_\varepsilon + 2 \arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in k $\Rightarrow$ $\text{Const} = 0$

$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi \quad \Rightarrow \quad \int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

- allg. Darst. $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

  aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

δ-Formeln

- Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\delta(-x) = \delta(x)$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))
- etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$
- 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  $\Rightarrow$ kann kartesisch denken und $\delta(\vec r) = \begin{cases} 2D: & \delta(x)\delta(y) \\ 3D: & \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$

  schreiben, muß aber nicht ($\rightarrow$ Ü 66 f-h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$$

Physik mit δ

Kann mit δ Häute, Drähte, Punkte in 3D formulieren.

Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -\gamma m \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$)

bleiben gültig, nur $\rho(\vec r)$ $\left(= \frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}\right)$ spezialisiert sich.

z.B. • hom. Scheibe (M,R): $\rho(\vec r) = A\, \delta(z)\, \Theta(R-\varrho)$

$$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec r) = A \int_0^R d\varrho\, \varrho \underbrace{\int d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A\frac{R^2}{2}2\pi \quad \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$$

• hom. Stab (M,L): $\rho(\vec r) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \Theta(x(L-x))$

$$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \quad \Rightarrow B = \frac{M}{L}$$

- Punktmasse (M) am Ursprung

  $\rho(\vec r) = C\delta(\vec r)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, C\, \delta(\vec r) = C \quad \Rightarrow \rho(\vec r) = M\delta(\vec r)$

- Punktladung (m,q) mit $\vec r_0(t)$

  ((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))

  $\rho(\vec r, t) = q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$

  $\vec j(\vec r, t) = \dot{\vec r}_0(t)\, q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$

  (($\Rightarrow$ Teilchenstrahlen; DESY; CERN !))

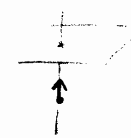
Bsp Q und I zu $\vec r_0(t) = vt\, \vec e_3 = (0,0,vt)$

$$Q = \int d^3r\, \rho(\vec r) = q \int d^3r\, \delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$$

$$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec f \cdot \vec j = \int dx \int dy\, \vec e_3 \cdot v\vec e_3\, q\, \delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$$

$$= vq \int dx \int dy\, \delta(x)\delta(y)\, \delta(0 - vt)$$

$$= vq\, \delta(vt) = q\, \delta(t)$$



- Hohlkugel (M,R) um Ursprung 

  $\rho(\vec r) = \alpha\, \delta(r-R)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, \alpha\, \delta(r-R) = \alpha 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \delta(r-R) = \alpha 4\pi R^2$

  $\Rightarrow \rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r-R)$

Bsp Gravitationspotential einer Hohlkugel (M,R) (vgl. Ü 64)

((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))

$$V(\vec r) = -\gamma m \frac{2\pi}{r}\int_0^\infty dr'\, r'\, \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r'-R)\left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$$

$$= -\gamma m \frac{M}{2Rr}\Big[\underbrace{|r+R| - |r-R|}\Big] \qquad = \begin{cases} 2R & \text{für } r>R \text{ (außen)} \\ 2r & \text{für } r<R \text{ (innen)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\ -\frac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$$

(($\Rightarrow$ innen keine Kraft ! Hohlwelt $\Rightarrow$ umsonst nach USA, nur abstoßen;

Realität? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche !))

((Metallbügel wie Holzbügel, denn:

Elektrostatik ⇒ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec{K} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ aus.

(Kenne $\vec{K}$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec{K} \overset{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi$, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$ "Coulomb-Potential"))

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS, auf etwas höherem Niveau

WS - Lösungsmethoden: Ansatz, $u \pm a$, $v = \frac{1}{y}$, $e^{\alpha t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x + mk(t)$$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist
- gewöhnlich ($\neq$ partiell: $(\partial_t - \partial_x) y = u(x,t)$),
- 2. Ordnung (max. $'$-Anzahl),
- linear (y, y', y'' hoch eins),
- inhomogen ($f \neq 0$),
- explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y'' + \omega^2 y = k_0$, d.h. $L_2 y = k_0$ mit $L_2 = \partial_x^2 + \omega^2$

hat $y_{allg.}(x) = \underbrace{\frac{k_0}{\omega^2}}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen}} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK(Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x), \text{ mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \ldots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- • $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1, .., n$
- •• Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$
- ••• Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$, wobei y_{sp} <u>eine</u> spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

- • denke an Newton. kann bei $x = 0$ starten mit AB $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder ...

  ⇒ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)
- •• hat n und löst $L_n y = 0$
- ••• $L_n y_{allg} = f$

  $\underline{L_n y_{sp} = f}$

  $L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0$, d.h. $y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon $F'=f$ ganz fast nie!

① Potenzansatz $\quad x^2y''-2xy'+2y=0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{ - = } \partial\text{- Potenz}}$

$y=x^\lambda$, $\quad \lambda(\lambda-1)x^2x^{\lambda-2}-2\lambda x x^{\lambda-1}+2x^\lambda=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$, $\quad \lambda=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

$\Rightarrow y_{allg}=C_1x+C_2x^2$

② neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x=x(\tau)$

benutze $y(x)=y(x(\tau))=u(\tau)=u(\tau(x))$

habe $y'=u'^{\tau}\cdot\tau'^{x}$ usw. $(y'',\dots)$

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $\quad x^2y''-2xy'+2y=0 \quad$ (s.o.), $\quad 0<x$

setze $x=e^\tau$; $y(x)=y(e^\tau)=u(\tau)=u(\ln(x))$,

$y'=u'^{\tau}\frac{1}{x}=u'^{\tau}e^{-\tau}$, $\quad y''=u''\frac{1}{x^2}-\frac{u'}{x^2}=u''e^{-2\tau}-u'e^{-2\tau}$,

erhalte $\quad e^{2\tau}(u''-u')e^{-2\tau}-2e^\tau u'e^{-\tau}+2u=0$

$u''-3u'+2u=0 \quad (*)$

③ e-Ansatz: bei $\boxed{\text{lin, hom, konst Koeff.}}$

Bsp $\quad (*)$ mit $u=e^{\omega t}$ gibt $\omega^2-3\omega+2=0 \Rightarrow \omega=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

$u_{allg}=C_1e^\tau+C_2e^{2\tau}$

Bsp $\quad (\partial_t^2+2\gamma\partial_t+\omega_0^2)x(t)=0 \quad$ (harm. Oszi. mit Reibung)

$x=e^{\omega t}$, $\quad \omega^2+2\gamma\omega+\omega_0^2=0$, $\quad \omega=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \quad (\omega_0<\gamma)$

$x_{allg}(t)=C_1e^{-\gamma t-\Gamma t}+C_2e^{-\gamma t+\Gamma t}$

$\gamma<\omega_0$: $\quad \omega=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

$\gamma=\omega_0$: nur 1 Lsg? falsch!

studiere $\omega_0\to\gamma$: $\Gamma=\varepsilon$, dann $\varepsilon\to 0$

$x_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t)=e^{-\gamma t}(C_1e^{-\varepsilon t}+C_2e^{\varepsilon t})$, $\quad e^\varepsilon\approx 1+\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$=e^{-\gamma t}(\underbrace{C_1+C_2} + \underbrace{(C_2-C_1)\varepsilon} t+\mathcal{O}(\varepsilon^2))$

$=e^{-\gamma t}(A+B\,t)$

④ neue Fkt. (viele Möglichkeiten!)

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\quad \boxed{y'+P(x)y=Q(x)}$

y_{hom}: $\quad \frac{y'}{y}=\ln(y)'^{x}=-P(x)$

$\ln(y)=-\int_{x_0}^{x}dx'\,P(x')$

Setze $\quad y=y_{hom}\cdot u(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}dx'\,P(x')}\,u(x)$

$\Rightarrow \cancel{-Pe}\,u+e\,u'+\cancel{Pe}\,u=Q$

$u'=Qe^{+}$, $\quad u=\int_{x_1}^{x}dx'\,Q(x')\,e^{+\int^{x'}\dots}+C$

$y_{allg}(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}dx'\,P(x')}\left(C+\int_{x_1}^{x}dx'\,Q(x')\,e^{\int_{x_0}^{x'}dx''\,P(x'')}\right)$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten?? Nein, nur 1: bei (x_0,x_1)-Änderung ändert sich C.

⑤ Variation der Konstanten

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\quad \boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$

wenn man eine Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt,
dann reduziert $y=y_1\cdot u$ die Ordnung um 1.

$\ulcorner\ \partial_x^n f\cdot g=(\partial_x^{vorne}+\partial_x^{hinten})^n f\cdot g\ \lrcorner$

$\underline{y_1''u}+2y_1'u'+y_1u''+\underline{ay_1'u}+ay_1u'+\underline{by_1u}=f$

$\underline{\quad}=0$ nach Voraussetzung haben also $y_1 u'' + (2y_1' + a y_1) u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + (2\frac{y_1'}{y_1} + a) v = f/y_1$

ist 1.0. $\Rightarrow$ nun P-Q-Formel!

(6) Trennung der Variablen

((erstmals nicht-linearer Fall))

$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$, alle y nach links

$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{= \partial_y H(y)} y'(x) = \underbrace{f(x)}_{= \partial_x F(x)}$ Stammfktn suchen

$\partial_x H(y(x)) = \partial_x F(x) \Rightarrow H(y) = F(x) + C$

((zur Not: $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$))

(7) Reduktion(en) der Ordnung

(a) $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^{y} y'^{x} = p'^{y} p$

$\Rightarrow p'^{y} = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl 1.0. für $p(y)$

Bsp: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = (\frac{m}{2} v^2)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

(b) $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl 1.0.

(c) Landau-Trick : wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2 y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = b(t)$

$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1} \underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} = b(t)$, löse $(\partial_t + i\omega) u = b(t)$ usw.

(8) Dgl. $\geq$ 2.0. $\underset{(\longleftarrow)}{\longrightarrow}$ Dgl-System 1.0.

((geht immer ; Computer froh über System))

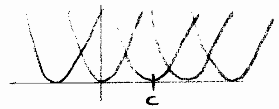
Bsp $y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array} \right\}$

(9) singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

Bsp $y'^2 = 4y$, $y' = \pm 2\sqrt{y}$, TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}} y' = \pm 1$ $= \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{x} = \pm 1$, $\sqrt{y} = \pm x + C$, $y = (\pm x + C)^2$, $y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch!   "Singuläre Lsg"

$\left\{ \begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\}$

(10) Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem : $L y(x) = f(x)$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L\, G(x,a) = \delta(x-a)}$

Wenn Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

dann $\vee \int_B da\, f(a) \overset{\text{wirkt}}{\overbrace{L\, G(x,a)}} = \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$L \underbrace{\int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{= y(x)} = f(x)$

$\Rightarrow$ ein G gibt ein y , d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache-Antworten G zusammengesetzt.))

Bsp $\dot{v} = -g$ (freier Fall), $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich: $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten: $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^T da\, (\Theta(t-a) + A)(-g)$$
$$= -g \int_0^t da \underbrace{- gAT}_{c} = -gt + C$$

Bem.: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

allg.: wenn L „translationsinvariant",

d.h. $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; nicht $x\partial_x$),

dann genügt es, $L\, G(x) = \delta(x)$ zu lösen,

und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

Bsp $\dot{v} + \gamma v = k(t)$

((hat via „P-Q-Formel" ④ $(P = \gamma, \int^t dt' P = \gamma t)$

die allg. Lsg. $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt' k(t') e^{\gamma t'}\right)$))

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma)\, G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans („γ muß weg") $G(t) = u(t) e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$

$u' = \delta(t) e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1$, $u = const_t + \Theta(t)$

also $G(t) = (const_t + \Theta(t)) e^{-\gamma t}$

und $v(t) = \int_0^T da\, k(a) (const + \Theta(t-a)) e^{-\gamma(t-a)}$

$= e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, k(a) e^{\gamma a}\right)$ ✓✓.

Bem.: • L mußte nur linearer Op. sein: es gibt viele L's.

• Punkt-Ursache in höherer Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\delta(t)$.

((Bem.: L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

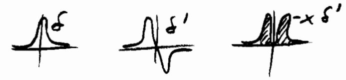
(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 = L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L$

$\equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator
$[a,b] \equiv ab - ba$))

Bem. $-x\delta'(x) \overset{?!}{=} \delta(x)$ (s. Sonderblatt)

denn:  $\Rightarrow$ beide Seiten hoh, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx\, (\underbrace{-x}_{u}\underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\, \delta(x) = 1$ ✓✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t
$\quad$ L rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$,
$\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ $\rightarrow$ deren Dgln?

z.B. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$

$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. brauchen $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, partielle Dgln

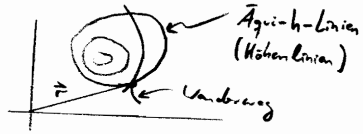
Das „etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung,

ist also Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
(Tensorfeld $\underline{\sigma}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $(\phi(\vec r), \vec A(\vec r))$ in Nähe der Stelle $\vec r$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec r)$.

gehe ab $\vec r$ in Richtung $\vec e$. Erlebe $\phi(\vec r + s\vec e)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steilheit}\\ \text{in } \vec e\text{-Richtung}\\ \text{bei } \vec r\end{array}\right\} = \text{Richtungsableitung}$$

$$= \left[\partial_s \phi(x+se_1, y+se_2, z+se_3)\right]_{s=0}$$

$$= e_1\partial_x\phi + e_2\partial_y\phi + e_3\partial_z\phi$$

$$= \vec e\cdot(\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

$$= \vec e\cdot\vec\nabla\phi$$

kann verschiedene $\vec e$ wählen.

Finde z.B. $\vec e\cdot\vec\nabla\phi = 0$, d.h. keinen Anstieg, d.h. $\vec e$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec\nabla\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.

Finde z.B. $\vec e\cdot\vec\nabla\phi = \max$, d.h. $\vec\nabla\phi \sim \vec e$

$$\Rightarrow \vec\nabla\phi = \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\phi = \text{grad}\,\phi$$

mit $\boxed{\vec\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec\nabla$ Skalarfeld heißt „Gradient"

(aber $\vec\nabla\cdot$, $\vec\nabla\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)

(kann $\vec\nabla$ oder ∇ schreiben ...)

$\vec\nabla$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\vec a$ ist V. $\Leftrightarrow$ $\vec a\,' = D\vec a$

$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec\nabla' = D\vec\nabla}$ Sinn macht

Testen dieser Operator-Identität: $(\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})\,\phi(\vec r = D^T\vec r\,') \stackrel{?}{=} D\vec\nabla\phi$

hiervon die j-te Komp. $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ ist

$$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x_j'}\phi\left(\text{l-te: } (D^T)_{lm}x_m' = D_{ml}x_m'\right) = (\partial_{x_l}\phi)\,D_{ml}\,\delta_{mj}$$

$$= D_{jl}\,\partial_{x_l}\phi = (D\vec\nabla\phi)_j$$

$$\Rightarrow \text{also ist } \vec\nabla'\phi = D\vec\nabla\phi \quad \forall\phi \qquad \blacksquare$$

$\vec\nabla$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec e_j$ in $\vec\nabla = \vec e_1\partial_x + \vec e_2\partial_y + \vec e_3\partial_z$ andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

$$\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_{\text{weg n. oben}} + \vec e_\vartheta\,\partial_{\text{weg n. Süden}} + \vec e_\varphi\,\partial_{\text{weg n. Moskau}}$$

$\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = (Sc, Ss, C)$ $\qquad S = \sin(\vartheta)$

$\vec e_\varphi = (-s, c, 0)$ $\qquad s = \sin(\varphi)$

$\vec e_\vartheta = (Cc, Cs, -S)$

((s. Kap. 6; zu $\vec e_\varphi$:  x $\quad \vec e_\varphi = \frac{(-y, x, 0)}{1\times 1} = \frac{(-Ss, Sc, 0)}{S}$

zu $\vec e_\vartheta$: $\vec e_\varphi\times\vec e_r = \vec e_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Moskau: $(rS)\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi}$$

Dimension: $[\vec\nabla] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\text{rhs}]$ ✓

Bsp $\quad \vec\nabla\phi(r) = \vec e_r\,\partial_r\phi(r) = \vec e_r\,\phi'(r)$

Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)

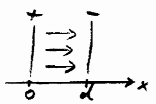
$$\vec{K} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

zu $\vec{B}=0$: $\vec{K} = q\vec{E} \overset{?!}{=} -\vec{\nabla}V$

$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ mit $\phi = \frac{V}{q}$ "el.-statisches Potential"

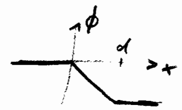
ϕ-Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$\vec{E}_{innen} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec{\nabla}\phi$

$\Rightarrow \phi = -Ex\ (+C)$



Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat Coulomb-Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

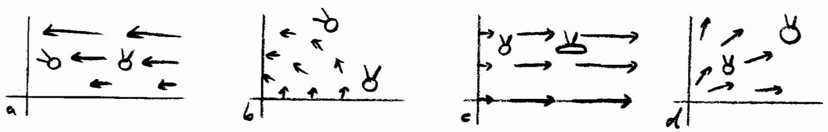
$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ ((check: $\vec{\nabla}$ in Kugelkoord ✓))

8.2 Rotation

gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$

lokale Charakteristika? $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \rightsquigarrow$ § 8.3, $\vec{\nabla}\times\vec{A} \rightsquigarrow$ hier

((Realisierung: setze $\vec{A}(\vec{r},t) = \alpha\vec{v}(\vec{r},t)$, lasse Wasser mit $\vec{v}$ strömen))



"♉ ≙ treibender Wasserfloh"

$\vec{A}$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) "Divergenz"

Floh fährt mit, hat bei $\vec{r}$ also $v(\vec{r})$, sieht

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}) - v(\vec{r}) \qquad (\overset{?}{=} \text{Matrix}\cdot d\vec{r})$$

$$= \left(v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec{r}), \dots, \dots\right)$$

$$= \left(v_1'^{x}dx + v_1'^{y}dy + v_1'^{z}dz, \dots, \dots\right)$$

$$= \begin{pmatrix} v_1'^{x} & v_1'^{y} & v_1'^{z} \\ v_2'^{x} & v_2'^{y} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V\, d\vec{r}$$

aufspalten in sy/asy: $V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V+V^T) + \frac{1}{2}(V-V^T)$

$\Rightarrow d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A = V_S\, d\vec{r} + V_A\, d\vec{r}$

dreht Floh nicht (dehnt ihn nur),

denn $D\, d\vec{v}_S = \underline{D V_S D^T D}\, d\vec{r}$

$d\vec{v}_S{}' = V_S'\, d\vec{r}\,'$, $V_S' = \begin{pmatrix} V_{S11}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S22}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S33}' \end{pmatrix}$

((kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3: HT))

$$d\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^{y} - v_2'^{x}}{2} & \frac{v_1'^{z} - v_3'^{x}}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^{z} - v_3'^{y}}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} = \vec{\omega}\times d\vec{r}$$

also $2\vec{\omega} = \left(v_3'^{y} - v_2'^{z},\ v_1'^{z} - v_3'^{x},\ v_2'^{x} - v_1'^{y}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{v}$

Def $\text{rot}\,\vec{A} = \alpha\,\text{rot}\,\vec{v} := \alpha\, 2\vec{\omega}$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \text{Wirbelfeld von } \vec{A}}$$

Bsp wirbelfreie zirkulare Strömung

$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}$. $\vec{v}(\vec{r}) = ?$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\vec{v} = \vec{e}_\varphi \cdot v(\varrho) = (-y, x, 0)\boxed{\frac{v(\varrho)}{\varrho}} = f(\varrho)$

$= (-yf, xf, 0)$

$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(0, 0, (xf)'^{x} + (yf)'^{y}\right) \overset{!}{=} \vec{0}$

$2f(\varrho) + \varrho f'(\varrho) = 0$

lösen: Trick ①, $f = \varrho^\lambda$, $2+\lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\varrho^2}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{c}{\varrho}\vec{e}_\varphi$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r},t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas

dehnbarer Floh strömt mit

Def $\quad \mathrm{div}\,\vec{A} := \alpha\,\frac{\dot{Vol}}{Vol}$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $d\vec{v} = d\vec{v}_S + \underbrace{d\vec{v}_A}_{\text{antisym; dreht nur, dehnt nicht}}$ (s.o., S.88)

$d\vec{v}_S{}' = V_S{}'\,d\vec{r}{}' = (V_{S_{11}}'\,dx',\ V_{S_{22}}'\,dy',\ V_{S_{33}}'\,dz')$

lege Quader (dx',dy',dz') am Stelle $\vec{r}{}'$

rechte Wand bewegt sich um $V_{S_{11}}'\,dx'$ schneller als linke, usw.

$$\Rightarrow \dot{Vol} = (dy'dz')\,V_{S_{11}}'\,dx' + (dx'dz')\,V_{S_{22}}'\,dy' + (dx'dy')\,V_{S_{33}}'\,dz'$$
$$= Vol\cdot(V_{S_{11}}' + V_{S_{22}}' + V_{S_{33}}') = Vol\cdot Sp(V_S') \underset{\text{Spur inv. bei Dreh.}}{=} Vol\cdot Sp(V_S)$$
$$= Vol\cdot(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)$$
$$= Vol\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

Bsp quellenfreie kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$. $\quad \vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\vec{j} = \vec{e}_r\cdot j(r) = \vec{r}\,\underbrace{\frac{j(r)}{r}}_{= f(r)}$

$= (xf, yf, zf)$ $\qquad \partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = (xf)'^{x} + (yf)'^{y} + (zf)'^{z} = 3f(r) + rf'(r) \stackrel{!}{=} 0$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3+\lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{C}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{C}{r^2}\,\vec{e}_r$ $\qquad$ ((z.B. Coulomb-Feld$_{(s.o.)}$ $\vec{E} \sim -\mathrm{grad}\,\frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r},t)$, Druck $p(\vec{r},t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{u}} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} &= \nu\,\underset{\vec{\nabla}^2}{\Delta}\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f} \\ \vec{\nabla}\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4 Gln

4 Variablen: $\vec{u}, p$

gegeben: externe Kraft $\vec{f}(\vec{r},t)$

$\Rightarrow$ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn bei $\vec{f} = \vec{0}$

gibt $\boxed{1 \text{ Million Dollar}}$!

$\rightsquigarrow$ www.claymath.org, "Millennium Problems" (unter Awards)

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))

Kontinuitätsglg (Conti)

(die wichtigste (?) partielle Dgl. [leider 4 Unbekannte])

Dichte $\rho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ...)

$$\dot{\rho} = \partial_t \rho(\vec{r}(t), t) = \partial_t \rho(\vec{r}, t) - (\partial_t \vec{r} \cdot \vec{\nabla})\rho = \partial_t \frac{N}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

in "mitströmendem Volumen" bleibt Teilchenzahl N const, nur Vol. ändert sich:

$$= -\frac{N}{Vol.}\frac{\dot{Vol.}}{Vol.} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho \overset{(s. S. 89)}{=} -\rho\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$ (Conti)

Bem.: • gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.

• lokale Glg: gilt an jedem Pkt der Welt und seit 13.7 ± 0.2 Mrd. Jahren (WMAP)

• überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie

• 1 Glg. für 4 Unbekannte $\Rightarrow$ braucht noch andere Glgn (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $\quad [\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$\partial_{ct}\, c\rho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\partial_{ct}\\ -\vec{\nabla}\end{pmatrix}}_{\equiv \partial} \bullet \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix} = 0 , \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$\bullet$ Vierer-Skalarprodukt ($a\bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$)))

8.4 $\vec{\nabla}$ mal $\vec{\nabla}$

bisher: Feld-Charakterisierung linear in $\vec{\nabla}$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $(= \Delta_1 f)$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $(= \Delta_2 f)$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$\phi \longrightarrow \vec{\nabla}\phi \begin{cases} \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) & \text{(Null)} \\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) & = \Delta\phi \end{cases}$$

$$\vec{A} \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{A} \begin{cases} \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) & = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} \\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) & \text{(Null)} \end{cases} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \longrightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \end{cases}$$

• $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \vec{0}$,

denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc

• $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec{\nabla}^2}$

Laplace-Operator

• $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$

"bac-cab" $= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ $\quad$ (($\Delta\vec{A} = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)$))

• $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$,

denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc

• $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec{K}, \vec{E})$ ist als $\operatorname{grad}\phi$ darstellbar $\xrightarrow{\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = \vec{0}}$ es hat keine Wirbel

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec{B})$ ist als $\operatorname{rot}\vec{A}$ darstellbar $\xrightarrow{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0}$ es hat keine Quellen

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac{1}{r}$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	0 ?!, denn

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} + \left(x \cdot 3\frac{x}{r^5} + \dots + \dots\right) = 0 \quad \text{für } \underline{\underline{r>0}} \ (!)$$

$\rightarrow \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta \frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B.

$\left(\left(\vec e_{r,\vartheta,\varphi} : \text{s. S. 86}\right)\right)$

$$= \vec e_\varphi \frac{1}{rS}\left(\partial_\varphi \vec e_r\right)\partial_r + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\vec e_r\partial_\varphi\partial_r$$

$$\partial_\varphi\left(Sc, Ss, C\right) = \left(-Ss, Sc, 0\right) = S\vec e_\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r + 0$$

((

	$\vec e_r$	$\vec e_\vartheta$	$\vec e_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec e_\vartheta$	$-\vec e_r$	0
∂_φ	$S\vec e_\varphi$	$C\vec e_\varphi$	$(-S\vec e_r - C\vec e_\vartheta)$

))

$$\boxed{\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2 S}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2S^2}\partial_\varphi^2}\ , \quad S = \sin(\vartheta),\ C = \cos(\vartheta)$$

$$\Delta_r = \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(r\partial_r + 2\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(\partial_r r + 1\right)\partial_r = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r + 1\right)$$

$\partial_r r = 1 + r\partial_r$ $\qquad$ $= \partial_r r$

$$\boxed{\Delta_r = \frac{1}{r}\partial_r^2 r}$$

Green von Δ (behandle das "?!" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac{1}{r}$ war "krank" bei $r=0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac{1}{r} \rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\right.$ (s. Schulz-Buch PB), $\frac{1}{r}\left(1-e^{-r/\varepsilon}\right)$ (s. Ü83a), ... $\}$

hier: $\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta\frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\partial_r^2\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist in ε-Bereich lokalisiert, und hat

$$\int d^3r\,\frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\left[r\delta(r-\varepsilon)\right]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\,\delta(r-\varepsilon) = -4\pi$$

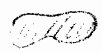
, ist also δ-Fkt

$$\Rightarrow \Delta\frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = -4\pi\delta(\vec r)$$

$$\underset{\varepsilon\to0^+}{\Rightarrow} \boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec r)}$$

8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

$\mathcal{G}$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h.  , aber nicht 

$\boxed{\text{I}}$	Sei $\vec E$ ein in $\mathcal{G}$ wirbelfreies Feld, d.h. rot $\vec E = \vec 0$	$\Rightarrow$	$\vec E$ hat in $\mathcal{G}$ ein Potential, d.h. $\vec E = -\text{grad}\,\phi$

Beweis: • OBdA nahe Ursprung, $\vec E = E(\vec 0) + S\vec r + A\vec r + \mathcal{O}(\vec r^2)$

Symm. Matrix $\qquad$ antisy. Matrix

• rot $\vec E = \vec 0 \Rightarrow A \overset{!}{=} 0$

((denn $A\vec r = \vec\omega\times\vec r$, s. S. 88; keine Rotation $\hat=$ $\vec\omega = 0$))

• $\vec E = \vec E(\vec 0) + S\vec r + \dots$ hat $\phi = -\vec E(\vec 0)\vec r - \frac{1}{2}\vec r S\vec r + \dots$

((denn $(\vec E)_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)r_k - \frac{1}{2}r_k S_{k\ell}r_\ell + \dots\right] = E_i(0) + S_{i\ell}r_\ell$

• im ganzen $\mathcal{G}$: $\phi(\vec r) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,')$

$\left(\left(\text{denn } -\partial_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\vec r_0}^{\vec r+\varepsilon\vec e_1} - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,') = \frac{1}{\varepsilon}\vec E\cdot\vec e_1\varepsilon = E_1\right)\right)$

• ϕ unabhängig von Weg $\mathcal{C}$?!

d.h.  geben gleiches ϕ ?!

$\overset{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9

2 Sei $\vec B$ ein in $\mathcal{G}$ quellenfreies Feld, d.h. $\operatorname{div}\vec B = 0$ $\Rightarrow$ $\vec B$ hat in $\mathcal{G}$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec B = \operatorname{rot}\vec A$

Beweis:
- lokal: $\vec B = \vec B(\vec 0) + S\vec r + \underbrace{A\vec r}_{\vec\omega\times\vec r} + \mathcal{O}(\vec r^{\,2})$
  - $\operatorname{div}\vec B = \partial_i\,[\,B_i(0) + S_{ij}r_j + A_{ij}r_j\,] = S_{ii} + \overset{0}{A_{ii}} = \operatorname{Sp}(S) \overset{!}{=} 0$
  - $\vec B$ hat $\vec A = \frac12\vec B(0)\times\vec r - \frac13\vec r\times S\vec r - \frac13\vec r\times(\vec\omega\times\vec r)$

    ((denn $\vec\nabla\times\left(\frac12\vec B(0)\times\vec r\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \frac12\vec B(0)\,(\vec\nabla\cdot\vec r) - \frac12(\vec B(0)\cdot\vec\nabla)\vec r = \frac12[3-1]\,\vec B(0)$

    und $\vec\nabla\times\left(-\frac13\vec r\times S\vec r\right) = \vec\nabla\times\left(\frac13 S\vec r\times\vec r\right) \underset{\text{ü 66 b}}{=} \frac13\left(2S\vec r - \vec r\,\underbrace{(\vec\nabla\cdot S\vec r)}_{=0,\ \text{s.o.}} + r\partial_r S\vec r\right)$

    $= S\vec r$, denn $r\partial_r S\vec r = S\,r\underbrace{\partial_r r\vec e_r}_{\vec e_r} = S\vec r$ ← nur Winkelabhängig))
- global: $\vec A(\vec r) = -\frac12\vec r\times\dfrac{1}{1+\frac12\vec r\vec\nabla}\,\vec B(\vec r)$ ← als Reihe gedacht: $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$

  ((→ s. S. 99))

Bem.: $\vec A$ nicht eindeutig festgelegt:

$\left.\begin{aligned}\vec B &= \operatorname{rot}\vec A_I\\ \vec B &= \operatorname{rot}\vec A_{II}\end{aligned}\right\}$ $\vec 0 = \vec\nabla\times\underbrace{(\vec A_I - \vec A_{II})}_{\text{kann ein Gradient sein!}}$ (s. S. 92: $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) = 0$)

also $\vec A_I = \vec A_{II} + \vec\nabla\chi(\vec r)$ möglich.

$\vec B$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

3 Unter den Lösungen $\vec A(\vec r)$ des Problems $\left\{\begin{aligned}\operatorname{div}\vec A &= Q(\vec r)\\ \operatorname{rot}\vec A &= \vec\omega(\vec r)\end{aligned}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q,\vec\omega$ gibt es nur ein von $Q,\vec\omega$ verursachtes Feld $\vec A$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

- "gibt es": setze $\vec A = \vec E + \vec B$ mit $\begin{aligned}\vec\nabla\cdot\vec E &= Q\\ \vec\nabla\times\vec E &= \vec 0\end{aligned}$, $\begin{aligned}\vec\nabla\cdot\vec B &= 0\\ \vec\nabla\times\vec B &= \vec\omega\end{aligned}$

  kenne $\vec E = -\vec\nabla\int d^3r'\,\dfrac{Q(\vec r')}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$, $\vec B = \vec\nabla\times\int d^3r'\,\dfrac{\vec\omega(\vec r')}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$

Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\int\ldots\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\int\ldots\right) - \Delta\int\ldots =: \vec\nabla ① + ②$

② $= -\int d^3r'\,\dfrac{\vec\omega(\vec r')}{4\pi}\,\underbrace{\boxed{\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{-4\pi\delta(\vec r-\vec r')}$
$= \vec\omega(\vec r)$

① $= \vec\nabla\cdot\int\ldots = \int d^3r'\,\dfrac{\vec\omega(\vec r')}{4\pi}\cdot\underbrace{\boxed{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{=-\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$

$\int dx'\,\omega_1(\vec r')\,(-\partial_{x'})\,\frac{1}{|\,|} = \int dx'\,\frac{1}{|\,|}\,\partial_{x'}\omega_1$ (part. Int.)

$\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{1}{|\,|}\,\underbrace{\boxed{\vec\nabla'\cdot\vec\omega(\vec r')}}_{=\vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r'))} = 0$ ((s. S. 92: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A = 0$))

$= 0$

$\Rightarrow \vec\nabla\times\vec B = \vec\omega$ ✓✓ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ ✓✓ wg. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A = 0$))

- "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C = \vec A_I - \vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{aligned}\vec\nabla\cdot\vec C &= 0\\ \vec\nabla\times\vec C &= \vec 0\end{aligned}\right\}$ erfüllen

  (.. ⑧: System 1. Ordng → weniger Gln. 2. Ordng)

  per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C) = \vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec C)}_{=0\ \text{nach Voraussetzung}} - \Delta\vec C$

  $\Rightarrow \Delta C_1 \overset{!}{=} 0,\ \Delta C_2 \overset{!}{=} 0,\ \Delta C_3 \overset{!}{=} 0$

  es gilt aber: **Weil eine Lsg ϕ von $\Delta\phi = 0$ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.**

  ((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\,\phi$ neg, nicht 0))

  $\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb{R}^3$ $\vec A \to \vec 0$ (nach Vorr. in **3** $\sim 1/r^2$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C = \vec 0$ überall ■

9. Integralsätze

((Kap. 8 war **lokale** Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. **Hier**: einige **globale** Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\, \partial_x F(x) = F(b) - F(a)$

(1.) $\int_1^2 d\vec{r}\cdot \operatorname{grad}\phi = \phi(2) - \phi(1)$

((denn: $lhs = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\nabla}\phi}_{\overset{!}{=}\,\partial_t \phi(\vec{r}(t))} = \phi(\vec{r}(t_2)) - \phi(\vec{r}(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\, \operatorname{div}\vec{E} = \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{E}}$

ein raumfestes Volumen, ggf. mehrfach zus.h.

die Oberfläche von V, ggf. mehrere Teile ($\oint$ weil geschlossen)

Beweis: physikalisch, via Conti. $\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)

"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$\int_S d\vec{f}\cdot\vec{j} \overset{I_S}{=} -\partial_t Q_V = -\partial_t \int_V d^3r\, \rho = \int_V d^3r\,(-\dot{\rho}) \overset{(\text{Conti})}{=} \int_V d^3r\, \operatorname{div}\vec{j}$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec{f}\cdot \operatorname{rot}\vec{B} = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B}}$

gewölbtes Flächenstück — dessen Randkurve

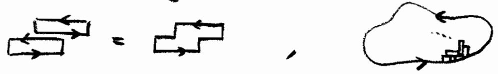
(auch mehrfach zus.h.)

Beweis: (a) für Rechtecke
(b) für beliebige ebene Fläche
(c) für gewölbte Fläche

(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene  , $d\vec{f} = \vec{e}_3 \cdot d^2r$

$$\int_S d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} = \int_{\text{Rechteck}} d^2r\; \vec{e}_3\cdot(\ldots,\ldots, \partial_x B_2 - \partial_y B_1)\big|_{z=0}$$
$$= \int_0^a dx \int_0^b dy\, \big(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0)\big)$$
$$= \int_0^b dy\, B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\, B_2(0,y,0) - \int_0^a dx\, B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\, B_1(x,0,0)$$

$$= \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

(b)  ,

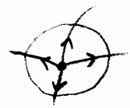
(c)  usw.

Bem
- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int_{n\text{-fach}} \nabla\ldots = \int_{(n-1)\text{fach}} \ldots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\phi = \phi_2 - \phi_1$

$\int_S d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{A}$

$\int_V d^3r\cdot\operatorname{div}\vec{A} = \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{A}$

9.2. Anwendungsbeispiele

Bsp Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0 = \dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j}$

n.Vorr.: nur Drähte in V

$$0 = \partial_t \int_V d^3r\, \rho + \int_V d^3r\, \operatorname{div}\vec{j} \overset{\text{gilt (Gauß)}}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{j} = 0 + \sum_\ell I_\ell$$

Bsp Magnetfeld um geraden Draht

(4. Maxwellglg.) $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j}/\varepsilon_0 c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_S d\vec{f}\cdot\vec{j}/\varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec{B} \perp$ oder $\parallel$ C ist, und daß Strom durch S fließt, z.B. gerader Draht, Strom I,

$S =$ Kreis(ρ) ; stets ist $d\vec{r} \parallel \vec{B}$

$\rightarrow B \cdot 2\pi\rho = I/\varepsilon_0 c^2$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$

Bsp <u>räumliche partielle Integration</u>

$$\int_V d^3r\ \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi = \int_V d^3r \left(\vec{\nabla}(\vec{A}\phi) - \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) \overset{(\text{Gauß})}{=} \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{A}\phi - \int_V d^3r\ \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

wenn $V = \mathbb{R}^3$, d.h. $S =$ dessen Rand, und $\vec{A}\to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \longrightarrow -\overleftarrow{\nabla}}$" erlaubt

Nachtrag zu S.95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$\vec{A} = \vec{r}\times\vec{C}(\vec{r})$ mit $\vec{C}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}\vec{B}(\vec{r})$

wurde behauptet. Zeige: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, falls $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

$$\vec{B} \overset{?!}{=} \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{C}) \overset{(\text{bac}-\text{cab})}{=} \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{\nabla}\vec{r}) + (\vec{C}\vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C}$$

a) $(\vec{\nabla}\vec{C}) = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n\vec{B}$

$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + n\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\right)\vec{B}\right\}$

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\qquad \left(\partial_j r_i \partial_i = \partial_j = \vec{\nabla}\right)$

b) $(\vec{\nabla}\vec{r}) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = C_i\partial_i r_j = C_j = \vec{C}$

$= 0 - 3\vec{C} - \vec{C} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C} = -2\left(1+\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{C} = \vec{B}$ $\blacksquare$

10. Fourier ($\hat{=}$ §12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode? (in allen Gebieten der Physik)

ähnlich §5.3: Potenzreihen

hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung $f(t)$) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad (\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton})$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.

Also sollte (könnte) jede <u>L-periodische</u> Fkt $f(x)$ ($f(x+L) = f(x)$) wie folgt darstellbar sein

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)\right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls ok, <u>welche c_n?</u> Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n=m: & 1 \\ n\neq m: & \frac{1}{L}\frac{e^{i(n-m)2\pi}-1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{\dots}\left[\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\overbrace{\sin[\dots]}^{0} - 1\right] = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)f(x)$

$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \dots \sin \dots$

((Nachweis, daß ? unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,

bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,

prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx' \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{=\,k(x-x')} f(x')$$

$$k(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\,\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x = 0, \pm L$, usw!

$$k(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L}\,2\pi\,\delta\!\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $k(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x-x'+mL) f(x') = f(x) \quad \bullet \quad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{L\text{-per.}}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \end{aligned}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

Bem.: bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand $f\cdot e^{\cdots}$ L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

Eigenschaften:

f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$

f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x) \cos\!\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$

d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe

f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n\, in\frac{2\pi}{L}}_{\text{hat diese Koeff.'n}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{-in\frac{2\pi}{L}a}}_{\text{hat diese Koeff.!}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mutig: $f(x) = \delta_{\text{per.}}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gibt $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \delta(x)\, e^{-\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

Bem.: Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen. (s. Ü88)

Anwendungen

1) Diffusion (vgl. Ü87) mit period. Start-Temp.

$$\dot{T} = D\Delta T, \quad T(x,t) = e^{tD\partial_x^2}\, T(x,0)$$

$$= e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$= \sum_n c_n e^{-tDn^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Osz.:

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = 6(t) = 6(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\ )}_{-\left(n\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma\, in\frac{2\pi}{T} + \omega_0^2 \;=:\; [\ ]_n} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n 6_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

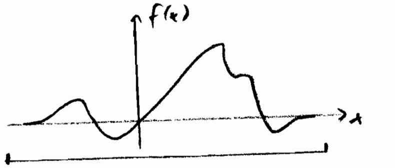
Koeff.-Vergl.: $c_n [\ ]_n = 6_n \Rightarrow c_n = \frac{6_n}{[\ ]_n}$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation (s. § 10.2)

10.2 Fourier-Transformation

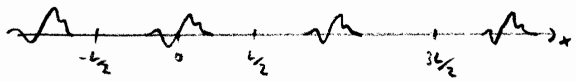
Motiv.: Geräusch statt Ton

"Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet / rückverfolgt

kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L \to \infty$ studieren



$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_n (Lc_n)\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mit $Lc_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde f\left(n\frac{2\pi}{L}\right)$

$$= \frac{1}{L}\sum_n \tilde f\left(n\frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

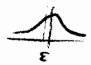
beide nur schwächer von n abh.

suche asympt. führenden f-Term bzgl $L \to \infty$

$\sum_n \ldots = \sum_n 1 \cdot \ldots \to \int dn \ldots$

$$\to \frac{1}{L}\int dn\, \tilde f\left(n\frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

((



, $O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon\, g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$

$\varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x)$ $\quad \| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

$O(\frac{1}{\varepsilon}) = \int dx\, g(\varepsilon x) = \sum_n g(\varepsilon n) + O(1)$))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi}dk$ gibt nun

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k) \\ \text{mit } \tilde f(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

- $\tilde f$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier ~ QFT)

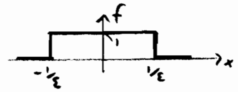
((Nachweis direkt: $f_F(x)$ bilden, $f_F = f$ zeigen,

$f_F(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right]$

$= \int dx' \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{= \delta(x-x')} f(x') = f(x)$, qed.))

((s. Kap. 6, Skript S. 74))

Bsp "Kasten" $f(x) = \Theta(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2)$



$\tilde f(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$

oder $\tilde f = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, (\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_x \sin(kx)) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow f = \Theta(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2)$ hat $\tilde f = 2\pi \frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin(\frac{x}{\varepsilon}) = \delta(x)$))

	$f(x) = 1$	hat	$\tilde f(k) = 2\pi\delta(k)$
und	$f(x) = \delta(x)$	hat	$\tilde f(k) = 1$

Bem.
- im physikalisch vollverständlichen Sinne sind Konstante und δ's F.-transformierbar
- f eng (großes ε), $\tilde f$ breit
  f breit, $\tilde f$ eng
- bei kleinem (großem) x und f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

Bsp Gauß $f(x) = A e^{-\alpha x^2}$

$\tilde f(k) = A\int dx\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\hookrightarrow \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}} e^{-\alpha x^2}$

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}k^{2n}(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{= \alpha^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}$ ((Kap. 6, S. 67))

$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\frac{1}{2^n}\alpha^{-\frac{1}{2}-n}$

$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\tilde f(k) \overset{\downarrow}{=} A\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = \underline{A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-k^2/4\alpha}}$$

Bem.:
- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde f$ breit
- $FT\{\text{Gauß}\} = \text{Gauß}$

  eine Forminvarianz unter F.T.!

  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}k\right)}$

  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

allg. Eigenschaften

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde f^*(k) = \tilde f(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow \tilde f(-k) = \pm \tilde f(k)$ $\bullet$ $\begin{cases} \cos - \text{Entwicklung} \\ \sin - \text{Entwicklung}\end{cases}$
- $\int dx\, |f|^2 = \underbrace{\int dx \frac{1}{2\pi}}\int dk\, \underbrace{e^{ikx}}\tilde f(k) \frac{1}{2\pi}\int dq\, \underbrace{e^{-iqx}}\tilde f^*(q)$ $\quad \delta(k-q)$

  $= \frac{1}{2\pi}\int dk\, |\tilde f(k)|^2$ "Parseval's Theorem"

- Tabellen: $f(x) = \frac12\left(f(x)+f(-x)\right) + \frac12\left(f(x)-f(-x)\right)$

  $=: g(x) + u(x)$

  $\tilde f(k) = \int dx\, e^{-ikx}\left(g(x)+u(x)\right)$

  $= \int dx \cos(kx)\, g(x) - i\int dx \sin(kx)\, u(x)$

Räumliche FT

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\underbrace{\tilde{\tilde{\tilde f}}(k_1,y,z)}_{=\frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\underbrace{\tilde{\tilde f}(k_1,k_2,z)}_{=\frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\tilde f(k_1,k_2,k_3)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(\vec r) &= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\,\tilde f(\vec k) \\ \text{mit } \tilde f(\vec k) &= \int d^3r\, e^{-i\vec k\vec r} f(\vec r)\end{aligned}}$$

((Raumzeitliche FT: — reine Konvention

$$\vec E(\vec r,t) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^4\int d^3k\, d\omega\, e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\tilde{\vec E}(\vec k,\omega)$$

$$\text{mit } \tilde{\vec E}(\vec k,\omega) = \int d^3r\, dt\, e^{-i\vec k\vec r + i\omega t}\,\vec E(\vec r,t) \quad))$$

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f\text{-Gln.}} & \overset{?}{- - \to} & \boxed{\text{Lösung } f} \\ \downarrow f=\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f \text{ einsetzen} & & \uparrow \text{"nur noch" Integrieren!} \\ \boxed{\tilde f\text{-Gl.}} & \xrightarrow{\text{lösen}} & \boxed{\text{Lösung } \tilde f} \end{array}$$

Bsp Elektrostatik

will $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec\nabla\times\vec E = \vec 0$ lösen

Abstieg: $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k \underbrace{\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot \\ \vec\nabla\times\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r}}_{=\underbrace{\vec\nabla e^{ikr}}_{=i\vec k e^{i\vec k\vec r}}\left\{\begin{matrix}\cdot\\ \times\end{matrix}\right\}} \tilde{\vec E}(\vec k) = \begin{cases}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho(\vec k) \\ 0\end{cases}$ $\quad \boxed{\vec\nabla \to i\vec k}$

Koeff.-Vergl.: $i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho \quad (\tilde 1)$

$i\vec k\times\tilde{\vec E} = \vec 0 \quad (\tilde 2)$

Lösen: $i\vec k\times(\tilde 2) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec k\,(\underbrace{i\vec k\cdot\tilde{\vec E}}_{(\tilde 1) \text{ einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec E} = \vec 0$

$\Rightarrow \tilde{\vec E}(\vec k) = -\frac{i\vec k}{\varepsilon_0 k^2}\tilde\rho(\vec k)$

Aufstieg: $\vec E(\vec r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, \underbrace{e^{i\vec k\vec r}(-i\vec k)}_{=-\vec\nabla e^{i\vec k\vec r}}\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\underbrace{\tilde\rho(\vec k)}_{=\int d^3r'\, e^{-i\vec k\vec r'}\rho(\vec r')}$

$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, \frac{4\pi}{k^2}\, e^{i\vec k(\vec r-\vec r')}}_{\equiv K(\vec r-\vec r') = \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\ (\text{s.u.})}\rho(\vec r')$

$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r'|}$

(($K(\vec r) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kr)}{k}}_{=\pi/2} = \frac{1}{r}$, $\boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$\leftarrow 1 = \int dx\, \delta(x) = \int dx\, \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\, \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$, $x \to \varepsilon k r$ $\bullet$

FT → FR

$f(x) - f(x+L) = 0$

$\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[1-e^{ikL}\right]\tilde{f}(k) = 0$

Koeff-Vergl.: $\left[1-e^{ikL}\right]\tilde{f} = 0$

$\tilde{f}(k) = \sum_n 2\pi c_n\, \delta(k - n\frac{2\pi}{L})$

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} \sum_n 2\pi c_n\, \delta(k - n\frac{2\pi}{L})$

$= \sum_n c_n\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

Maxwell-Gln. in Untermalt

((Erinnerung: Intro Kap. 8, Skript S. 84: $\vec\nabla\cdot\vec E = \varsigma$, $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec j + \dot{\vec E}$))

setze $\vec E, \varsigma, \vec B, \vec j$ 4D-entwickelt ein

benutze $\left.\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\\ \vec\nabla\times\\ \partial_t\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\tilde{\vec E} = \left.\begin{matrix}i\vec k\cdot\\ i\vec k\times\\ -i\omega\end{matrix}\right\} e^{\cdots}\,\tilde{\vec E}$

also $\vec\nabla \to i\vec k$, $\partial_t \to -i\omega$

Koeff-Vergl. gibt also

$$\boxed{\begin{matrix} i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\varsigma, & i\vec k\cdot\tilde{\vec B} = 0 \\ i\vec k\times\tilde{\vec E} = i\omega\tilde{\vec B}, & i\vec k\times\tilde{\vec B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\tilde{\vec j} - \frac{i\omega}{c^2}\tilde{\vec E}\end{matrix}}$$

⇒ $\widetilde{\text{Max}}$ ist nur noch System von Vektorglgn.,
leicht auflösbar nach $\tilde{\vec E}$, $\tilde{\vec B}$ (selber machen? Trick: z.B. $i\vec k\times$(Glg.))

⇒ Aufstieg zur kausalen Lösung (selber ?!)
füge "infinit. Leitfähigkeit (Reibung!) des $\mathbb{R}^3$" dazu,
via $\tilde{\vec j} \to \tilde{\vec j} + (\varepsilon_0 c^2\varepsilon)\tilde{\vec E}$, $\vec j \to \vec j + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\vec E$