Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\int\ldots\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\int\ldots\right) - \Delta\int\ldots =: \vec\nabla ① + ②$

$$② = -\int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\,\underbrace{\boxed{\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{=-4\pi\delta(\vec r-\vec r')} = \vec w(\vec r)$$

$$① = \vec\nabla\cdot\int\ldots = \int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\cdot\underbrace{\boxed{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{=-\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$$

$$\int dx'\,w_1(\vec r')\,(-\partial_{x'})\frac{1}{|\;|} = \int dx'\,\frac{1}{|\;|}\,\partial_{x'}w_1 \qquad \text{(part. Int.)}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{1}{|\;|}\,\underbrace{\boxed{\vec\nabla'\cdot\vec w(\vec r')}}_{=\vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r'))=0} \quad \text{((s. S. 92: div rot } \vec A=0\text{))}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ $\vec\nabla\times\vec B=\vec w$ ✓✓ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B=0$ ✓✓ wg. div rot $\vec A=0$))

• "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C=\vec A_I-\vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\vec C=0\\ \vec\nabla\times\vec C=\vec 0\end{matrix}\right\}$ erfüllen

(.. ⑧: System 1. Ordnung → weniger Gln. 2. Ordnung)

per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C)=\vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec C)}_{\overset{!}{=}0\text{ nach Voraussetzung}} - \Delta\vec C$

$$\Rightarrow \Delta C_1\overset{!}{=}0,\quad \Delta C_2\overset{!}{=}0,\quad \Delta C_3\overset{!}{=}0$$

es gilt aber:

Weil eine Lsg ϕ von $\Delta\phi=0$ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.

((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow$ $(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\phi$ neg, nicht 0))

$\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb{R}^3$ $\vec A\to\vec 0$ (nach Vorr. in ③ $\sim\frac{1}{r^2}$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C=\vec 0$ überall ∎

9. Integralsätze

((Kap. 8 war lokale Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. Hier: einige globale Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\, \partial_x F(x) = F(b) - F(a)$

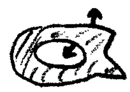
(1.) $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\,\phi = \phi(2) - \phi(1)$

((denn: $lhs = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla}\phi}_{\overset{!}{=} \partial_t \phi(\vec{r}(t))} = \phi(\vec{r}(t_2)) - \phi(\vec{r}(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{E} = \oint_S d\vec{f} \cdot \vec{E}}$

ein raumfestes Volumen ggf. mehrfach zus.h.

die Oberfläche von V ggf. mehrere Teile ($\oint$ weil geschlossen)



Beweis: physikalisch, via Conti $\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)

"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$I_S \overset{!}{=} -\partial_t Q_V$$

$$\int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} \overset{!}{=} -\partial_t \int_V d^3r\, \rho = \int_V d^3r\,(-\dot{\rho}) \overset{\text{(Conti)}}{=} \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{j}$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B}}$

gewölbtes Flächenstück

dessen Randkurve

(auch mehrfach zus.h.)

Beweis: (a) für Rechtecke
(b) für beliebige ebene Fläche
(c) für gewölbte Fläche

(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene  , $d\vec{f} = \vec{e}_3 \cdot d^2r$

$$\int_S d\vec{f}\cdot \operatorname{rot}\vec{B} = \int_{\text{Rechteck}} d^2r \; \vec{e}_3 \cdot \left(\ldots, \ldots, \partial_x B_2 - \partial_y B_1\right)\Big|_{z=0}$$

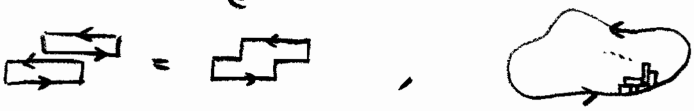
$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \left(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0)\right)$$

$$= \int_0^b dy\; B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\; B_2(0,y,0)$$

$$- \int_0^a dx\; B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\; B_1(x,0,0)$$

$=$ 

$$= \int_C d\vec{r}\cdot\vec{B}$$

(b) 

(c)  usw.

<u>Bem</u>

- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int_{n\text{-fach}} \nabla \ldots = \int_{(n-1)\text{fach}} \ldots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec{r}\cdot \operatorname{grad}\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$\int_S d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

$$\int_V d^3r \cdot \operatorname{div}\vec{A} = \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{A}$$

9.2. Anwendungsbeispiele

<u>Bsp</u> Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0 = \dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j}$ gibt

n. Vorr.: nur Drähte in V

$$0 = \partial_t \int_V d^3r\; \rho + \int_V d^3r\; \operatorname{div}\vec{j} \overset{\text{(Gauß)}}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{j} = 0 + \sum_\ell I_\ell$$

<u>Bsp</u> Magnetfeld vom geraden Draht

(4. Maxwellgleichung) $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j}/\varepsilon_0 c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{B} = \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_S d\vec{f}\cdot\vec{j}/\varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec{B} \perp$ oder $\parallel$ C ist, und daß Strom durch S fließt, z.B. gerader Draht, Strom I, 

S = Kreis (ϱ) ; stets ist $d\vec r \parallel \vec B$

$\leadsto B \cdot 2\pi\varrho = I/\varepsilon_0 c^2$

$\Rightarrow \vec B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{1}{\varrho}\,\vec e_\varphi$

Bsp räumliche partielle Integration

$$\int_V d^3r\; \vec A\cdot\vec\nabla\phi = \int_V d^3r \left(\vec\nabla(\vec A\phi) - \phi\,\vec\nabla\cdot\vec A\right)$$

$$\underset{(\text{Gauß})}{=} \oint_S d\vec f\cdot\vec A\phi - \int_V d^3r\;\phi\,\vec\nabla\cdot\vec A$$

wenn $V = \mathbb{R}^3$, d.h. S = dessen Rand, und $\vec A \to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \longrightarrow -\overleftarrow{\nabla}}$" erlaubt

Nachtrag zu S.95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$\vec A = \vec r \times \vec C(\vec r)$ mit $\vec C(\vec r) \equiv -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec r\vec\nabla}\,\vec B(\vec r)$

wurde behauptet. Zeige: $\vec B = \text{rot}\,\vec A$, falls $\text{div}\,\vec B = 0$.

$$\vec B \overset{?!}{=} \text{rot}\,\vec A = \vec\nabla\times(\vec r\times\vec C) \overset{(\text{bac}-\text{cab})}{=} \vec r(\vec\nabla\cdot\vec C) - \vec C(\vec\nabla\vec r) + (\vec C\vec\nabla)\vec r - (\vec r\vec\nabla)\vec C$$

a) $(\vec\nabla\vec C) = -\frac{1}{2}\vec\nabla\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec B$

$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec\nabla\cdot\vec B + n\left(-\frac{1}{2}\vec r\cdot\vec\nabla\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\vec\nabla(\vec r\cdot\vec\nabla)\right)\vec B\right\}$

$\text{div}\,\vec B = 0$ $\qquad \Leftarrow \partial_j r_i \partial_i = \partial_j = \vec\nabla$

b) $(\vec\nabla\vec r) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec C\cdot\vec\nabla)\vec r = C_i\partial_i r_j = C_j = \vec C$

$$= 0 - 3\vec C - \vec C - (\vec r\cdot\vec\nabla)\vec C = -2\left(1+\frac{1}{2}\vec r\cdot\vec\nabla\right)\vec C = \vec B \quad \blacksquare$$

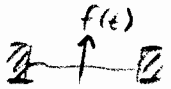
10. Fourier ($\hat{=}$ §12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode? (in allen Gebieten der Physik)

ähnlich §5.3: Potenzreihen

hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung 

) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad ((\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton}))$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.

Also sollte (könnte) jede L-periodische Fkt $f(x)$ $((f(x+L) \equiv f(x)))$ wie folgt darstellbar sein

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) \right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls OK, welche c_n? Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}}_{} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n = m: & 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{L} \dfrac{e^{i(n-m)2\pi} - 1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{L} \dfrac{\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\overbrace{\sin[\dots]}^{0} - 1}{\dots} = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) f(x)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \dots \sin \dots\dots$$

((Nachweis, daß ③ unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,

bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,

prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx' \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{\equiv K(x-x')} f(x')$$

$$K(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\,\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x=0, \pm L$, usw!

$$K(x) \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L}\, 2\pi\, \delta\!\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x-x'+mL) f(x') = f(x) \quad \bullet \qquad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{L\text{-per.}}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \end{aligned}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

Bem.: bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand $f\cdot e^{\cdots}$ L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

Eigenschaften: f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$

f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$

d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe

f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$