Kontinuitätsglg (Conti)

(die wichtigste (?)) partielle Dgl. [leider 4 Unbekannte]

Dichte $\rho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ..)

$$\dot{\rho} = \partial_t \rho(\vec{r},t) = \partial_t \rho(\vec{r},t) - (\partial_t \vec{r}\cdot\vec{\nabla})\rho = \partial_t \frac{N}{Vol.} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho$$

in "mitströmendem Volumen" bleibt Teilchenzahl N const, nur Vol. ändert sich:

$$= -\frac{N}{Vol.}\frac{\dot{Vol.}}{Vol.} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho \overset{(s.S.89)}{=} -\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0} \qquad \text{(Conti)}$$

Bem: • gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.

• lokale Glg: gilt an jedem Pkt $\vec{r}$ der Welt und seit 13.7±0.2 Mrd. Jahren (WMAP)

• überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie

• 1 Glg. für 4 Unbekannte ⇒ braucht noch andere Glgn (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $[\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$\partial_{ct}\, c\rho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\partial_{ct}\\ -\vec{\nabla}\end{pmatrix}}_{\equiv\partial} \bullet \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j}\end{pmatrix} = 0 \;, \qquad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$\bullet$ Vierer-Skalarprodukt ($a\bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$)))

8.4 $\vec\nabla$ mal $\vec\nabla$

bisher: Feld-Charakterisierung <u>linear</u> in $\vec\nabla$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $\quad (= \Delta_1 f)$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $\quad (= \Delta_2 f)$

$\nabla(\nabla\cdot\vec A) = \text{grad div } \vec A$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$\phi \longrightarrow \vec\nabla\phi \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) & \text{(Null)} \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) & \equiv \Delta\phi \end{cases}$$

$$\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) & = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) & \text{(Null)} \end{cases} \\ \vec\nabla\cdot\vec A \longrightarrow \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \end{cases}$$

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) = \text{rot grad } \phi = \vec 0$,

  denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec\nabla^2}$

  Laplace-Operator

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \text{rot rot } \vec A$

  "bac-cab" $= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A$ $\qquad ((\Delta\vec A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)))$

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) = \text{div rot } \vec A = 0$,

  denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc

- $\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) = \text{grad div } \vec A$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec k, \vec E)$ ist als grad ϕ darstellbar $\xrightarrow{\text{rot}(\text{grad }\phi) = \vec 0}$ es hat keine Wirbel

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec B)$ ist als rot $\vec A$ darstellbar $\xrightarrow{\text{div}(\text{rot }\vec A) = 0}$ es hat keine Quellen

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac{1}{r}$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	$0\ ?\ ↯$, denn

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} + \left(x\cdot 3\,\frac{x}{r^5} + \ldots + \ldots\right) = 0 \quad \text{für } \underline{\underline{r>0}} \ (!)$$

$\to \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \left(\vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B.

(($\vec e_{r,\vartheta,\varphi}$: s. S. 86))

$$= \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\left(\partial_\varphi \vec e_r\right)\partial_r + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\vec e_r\,\partial_\varphi\partial_r$$

$$\partial_\varphi \vec e_r = \partial_\varphi\left(Sc, Ss, C\right) = \left(-Ss, Sc, 0\right) = S\,\vec e_\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\,\partial_r + 0$$

((

	$\vec e_r$	$\vec e_\vartheta$	$\vec e_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec e_\vartheta$	$-\vec e_r$	0
∂_φ	$S\vec e_\varphi$	$C\vec e_\varphi$	$(-S\vec e_r - C\vec e_\vartheta)$

))

$$\boxed{\Delta = \underbrace{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\,\partial_r}_{=\Delta_r} + \frac{1}{r^2}\,\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2 S}\,\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2 S^2}\,\partial_\varphi^2}\ , \quad S = \sin(\vartheta),\ C = \cos(\vartheta)$$

$$\Delta_r = \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(r\partial_r + 2\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(\partial_r r + 1\right)\partial_r = \frac{1}{r}\,\partial_r\underbrace{\left(r\partial_r + 1\right)}_{=\partial_r r}$$

$\partial_r r = 1 + r\partial_r$

$$\boxed{\Delta_r = \frac{1}{r}\,\partial_r^2\, r}$$

Green von Δ

(behandle das "↯" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac{1}{r}$ war "krank" bei $r=0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac{1}{r} \to \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\right.$ (s. Schulz-Buch PB), $\frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ (s. Ü83a), $\left.\ldots\right\}$

hier: $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\,\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\partial_r^2 \Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist in ε-Bereich lokalisiert, und hat

$$\int d^3r\, \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r\,\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\left[r\,\delta(r-\varepsilon)\right]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\, \delta(r-\varepsilon) = -4\pi$$

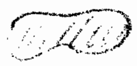
, ist also δ-Fkt

$\Rightarrow \quad \Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$

$\overset{\varepsilon\to 0^+}{\Rightarrow} \quad \boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec{r})}$

8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

$\mathcal{G}$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h.  , aber nicht 

$\boxed{\text{I}}$	Sei $\vec{E}$ ein in $\mathcal{G}$ wirbelfreies Feld, d.h. $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}$	$\Longrightarrow$	$\vec{E}$ hat in $\mathcal{G}$ ein Potential, d.h. $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$

<u>Beweis</u>: • OBdA nahe Ursprung, $\vec{E} = E(\vec{0}) + \underbrace{S}_{\text{symm. Matrix}}\vec{r} + \underbrace{A}_{\text{antisy. Matrix}}\vec{r} + \mathcal{O}(\vec{r}^{\,2})$

• $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow A \overset{!}{=} 0$

((denn $A\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, s. S. 88; keine Rotation $\hat{=}\ \vec{\omega} = 0$))

• $\vec{E} = \vec{E}(\vec{0}) + S\vec{r} + \dots$ hat $\phi = -\vec{E}(\vec{0})\,\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{r}S\vec{r} + \dots$

((denn $(\vec{E})_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)r_k - \frac{1}{2}r_k S_{kl} r_l + \dots\right] = E_i(0) + S_{il}r_l \dots$))

• im ganzen $\mathcal{G}$: $\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\cdot\vec{E}(\vec{r}\,')$

((denn $-\partial_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\varepsilon\vec{e}_1} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec{r}\,'\cdot\vec{E}(\vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon}\vec{E}\cdot\vec{e}_1\varepsilon = E_1$))

• ϕ unabhängig vom Weg $\mathcal{C}$?!

d.h.  geben gleiches ϕ ?!

$\overset{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9

$\boxed{2}$ Sei $\vec{B}$ ein in $\mathcal{G}$ quellenfreies Feld, d.h. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{B}$ hat in $\mathcal{G}$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

<u>Beweis:</u>

- lokal: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{0}) + S\vec{r} + \underbrace{A\vec{r}}_{\hookrightarrow\, \vec{\omega}\times\vec{r}} + \mathcal{O}(\vec{r}^{\,2})$

- $\operatorname{div}\vec{B} = \partial_i \left[B_i(0) + S_{ij} r_j + A_{ij} r_j \right] = S_{ii} + \overset{0}{A_{ii}} = \operatorname{Sp}(S) \overset{!}{=} 0$

- $\vec{B}$ hat $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

((denn $\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r}\right) \overset{\text{bekannt}}{=} \frac{1}{2}\vec{B}(0)(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \frac{1}{2}(\vec{B}(0)\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \frac{1}{2}[3-1]\,\vec{B}(0)$

und $\vec{\nabla}\times\left(-\frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{3}S\vec{r}\times\vec{r}\right) \underset{\uparrow\ \text{Ü 66 b}}{=} \frac{1}{3}\left(2S\vec{r} - \vec{r}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot S\vec{r})}_{=0,\ \text{s.o.}} + r\partial_r S\vec{r}\right)$

$= S\vec{r}$, denn $r\partial_r S\vec{r} = S\,\underbrace{r\partial_r r}_{=1}\,\underset{\uparrow\ \text{nur winkelabhängig}}{\vec{e}_r} = S\vec{r}$))

- global: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}\vec{B}(\vec{r})$
  ((→ s. S. 99)) als Reihe gedacht: $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$

<u>Bem.:</u> $\vec{A}$ nicht eindeutig festgelegt:

$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_I \\ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_{II}\end{array}\right\}$ $\vec{0} = \vec{\nabla}\times\underbrace{(\vec{A}_I - \vec{A}_{II})}$

kann ein Gradient sein! (s.S. 92: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$)

also $\vec{A}_I = \vec{A}_{II} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$ möglich.

$\vec{B}$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

$\boxed{3}$ Unter den Lösungen $\vec{A}(\vec{r})$ des Problems $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{A} = Q(\vec{r}) \\ \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\omega}(\vec{r})\end{array}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q, \vec{\omega}$ <u>gibt es</u> <u>nur ein</u> von $Q, \vec{\omega}$ verursachtes Feld $\vec{A}$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

- "gibt es": setze $\vec{A} = \vec{E} + \vec{B}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = Q$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$; $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\omega}$

kenne $\vec{E} = -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{Q(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\int d^3r' \frac{\vec{\omega}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$