Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)

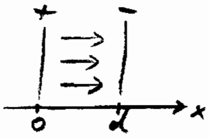
$$\vec K = q\vec E + q\,\vec v\times\vec B$$

zu $\vec B = 0$: $\vec K = q\vec E \overset{?!}{=} -\vec\nabla V$

$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi$ mit $\phi = \frac{V}{q}$ "el.-statisches Potential"

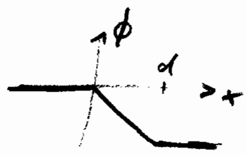
ϕ- Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$\vec E_{innen} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec\nabla\phi$

$\Rightarrow \phi = -Ex \;\; (+C)$



Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat

Coulomb-Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

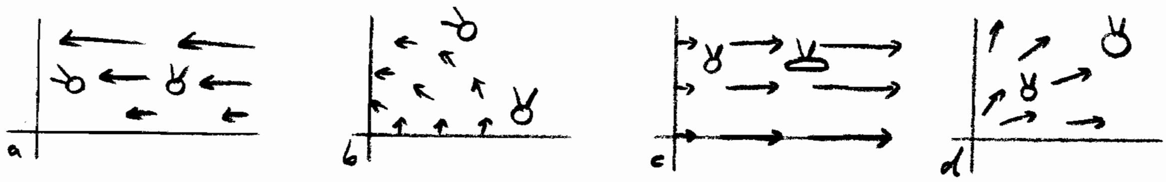
$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}$ ((check: mit $\vec\nabla$ in Kugelkoord ✓))

8.2 Rotation

gegeben: Vektorfeld $\vec A(\vec r, t)$

lokale Charakteristika? $\vec\nabla\cdot\vec A$ ⇝ § 8.3
$\vec\nabla\times\vec A$ ⇝ hier

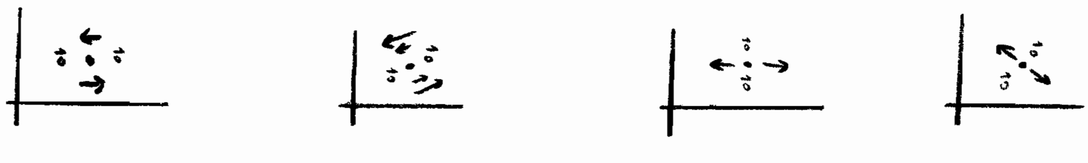
((Realisierung: setze $\vec A(\vec r,t) = \alpha\,\vec v(\vec r,t)$, lasse Wasser mit $\vec v$ strömen))



" ♉ ≙ treibender Wasserfloh "

$\vec A$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) "Divergenz"

Floh fährt mit, hat bei $\vec r$ also $v(\vec r)$, sieht



$$d\vec v = \vec v(\vec r + d\vec r) - v(\vec r) \qquad \left(\overset{?}{=} \text{Matrix} \cdot d\vec r \right)$$

$$= \left(v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec r), \dots, \dots \right)$$

$$= \left(v_1'^x dx + v_1'^y dy + v_1'^z dz, \dots, \dots \right)$$

$$= \begin{pmatrix} v_1'^x & v_1'^y & v_1'^z \\ v_2'^x & v_2'^y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V \, d\vec r$$

aufspalten in sy/asy: $V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V + V^T) + \frac{1}{2}(V - V^T)$

$$\Rightarrow d\vec v = d\vec v_S + d\vec v_A = V_S \, d\vec r + V_A \, d\vec r$$

dreht Fluß nicht (dehnt ihn nur),

denn $D \, d\vec v_S = \underbrace{D V_S D^T} D \, d\vec r$

$d\vec v_S' = V_S' \, d\vec r'$, $\quad V_S' = \begin{pmatrix} V_{S_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S_{33}}' \end{pmatrix}$

((kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3 : HT))

$$d\vec v_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^y - v_2'^x}{2} & \frac{v_1'^z - v_3'^x}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^z - v_3'^y}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec r \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec r = \vec\omega \times d\vec r$$

also $2\vec\omega = \left(v_3'^y - v_2'^z, \; v_1'^z - v_3'^x, \; v_2'^x - v_1'^y \right) = \vec\nabla \times \vec v$

<u>Def</u> $\text{rot}\,\vec A = \alpha \, \text{rot}\,\vec v := \alpha \, 2\vec\omega$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec A = \vec\nabla \times \vec A = \text{Wirbelfeld von } \vec A}$$

<u>Bsp</u> wirbelfreie zirkulare Strömung

$\vec\nabla \times \vec v = \vec 0$. $\quad \vec v(\vec r) = ?$ $\quad$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\vec v = \vec e_\varphi \cdot v(\varrho) = (-y, x, 0) \underbrace{\frac{v(\varrho)}{\varrho}}_{\equiv f(\varrho)}$

$= (-yf, xf, 0)$

$$\vec\nabla \times \vec v = \left(0, 0, (xf)'^x + (yf)'^y \right) \overset{!}{=} \vec 0$$

$$2f(\varrho) + \varrho f'(\varrho) = 0$$

lösen: Trick ①, $f = \varrho^\lambda$, $2 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\varrho^2}$

$\Rightarrow \vec v = \frac{c}{\varrho} \vec e_\varphi$ $\quad$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r},t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas

dehnbarer Floh strömt mit

<u>Def</u> $\operatorname{div}\vec{A} := \alpha\,\frac{\dot{Vol}}{Vol}$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A$ (s.o., S. 88)

antisym; dreht nur, dehnt nicht

$$d\vec{v}_S{}' = V_S{}'\,d\vec{r}\,' = \left(V_{S_{11}}'\,dx',\ V_{S_{22}}'\,dy',\ V_{S_{33}}'\,dz'\right)$$

lege Quader (dx', dy', dz') an Stelle $\vec{r}\,'$

rechte Wand bewegt sich um $V_{S_{11}}'\,dx'$ schneller als linke, usw.

$$\Rightarrow \dot{Vol} = (dy'dz')\,V_{S_{11}}'\,dx' + (dx'dz')\,V_{S_{22}}'\,dy' + (dx'dy')\,V_{S_{33}}'\,dz'$$
$$= Vol.\cdot\left(V_{S_{11}}' + V_{S_{22}}' + V_{S_{33}}'\right) = Vol.\cdot Sp(V_S') = Vol.\cdot Sp(V_S)$$

Spur inv. bei Dreh.

$$= Vol.\cdot(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)$$
$$= Vol.\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

<u>Bsp</u> quellenfreie kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$. $\vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\vec{j} = \vec{e}_r\cdot j(r) = \vec{r}\,\underbrace{\frac{j(r)}{r}}_{=f(r)}$

$= (xf, yf, zf)$

$\partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = (xf)'^x + (yf)'^y + (zf)'^z = 3f(r) + rf'(r) \overset{!}{=} 0$$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3+\lambda = 0$, folg $= \frac{C}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{C}{r^2}\,\vec{e}_r$ ((z.B. Coulomb-Feld $_{(s.o.)}$ $\vec{E} \sim -\operatorname{grad}\frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r},t)$, Druck $p(\vec{r},t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{u}} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} &= \nu \underset{\vec{\nabla}^2}{\Delta} \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f} \\ \vec{\nabla}\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4 Gln
4 Variablen: $\vec{u}, p$
gegeben: externe Kraft $\vec{f}(\vec{r},t)$

$\Rightarrow$ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn bei $\vec{f}=\vec{0}$

gibt $\boxed{\text{1 Million Dollar}}$!

$\rightsquigarrow$ www.claymath.org , "Millennium Problems" (unter Awards)

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))