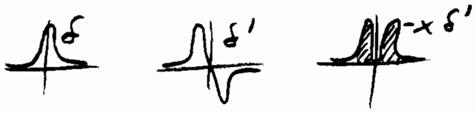
((Bem. L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 = L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L \equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator
$[a,b] \equiv ab - ba$))

Bem. $-x\,\delta'(x) \overset{?!}{=} \delta(x)$ (s. Sonderblatt)

denn:  $\Rightarrow$ beide Seiten hoch, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx\, (\underbrace{-x}_{u}\,\underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\,\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\, \delta(x) = 1$ ✓✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t
↳ rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$,
$\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ $\to$ deren Bewgln?

z.B.
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$$

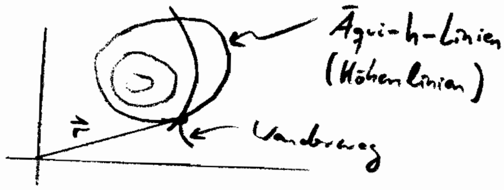
$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. brauchen $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, partielle Dgln

Das "etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung,
ist also Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
(Tensorfeld $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $\left(\phi(\vec r), \vec A(\vec r)\right)$ in Nähe der Stelle $\vec r$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec r)$.

gehe ab $\vec r$ in Richtung $\vec e$. Erlebe $\phi(\vec r + s\vec e)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steilheit}\\ \text{in } \vec e\text{-Richtung}\\ \text{bei } \vec r\end{array}\right\} = \text{Richtungsableitung}$$

$$= \Big[\partial_s \phi(x+se_1,\, y+se_2,\, z+se_3) \Big]_{s=0}$$

$$= e_1\, \partial_x \phi + e_2\, \partial_y \phi + e_3\, \partial_z \phi$$

$$= \vec e \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$$

$$= \vec e \cdot \vec\nabla \phi$$

kann verschiedene $\vec e$ wählen.

Finde z.B. $\vec e \cdot \vec\nabla\phi = 0$, d.h. keinen Anstieg, d.h. $\vec e$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec\nabla\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.

Finde z.B. $\vec e \cdot \vec\nabla\phi = \max$, d.h. $\vec\nabla\phi \sim \vec e$

$$\Rightarrow \vec\nabla\phi = \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,\phi = \operatorname{grad}\phi$$

mit $\boxed{\vec\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec\nabla$ Skalarfeld heißt „Gradient"

(aber $\vec\nabla\cdot$, $\vec\nabla\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)

(kann $\vec\nabla$ oder ∇ schreiben ...)

$\vec\nabla$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\quad \vec a$ ist V. $\Leftrightarrow \quad \vec a' = D\vec a$

$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec\nabla' = D\vec\nabla}$ Sinn macht

Testen dieser Operator-Identität: $(\partial_{x'},\partial_{y'},\partial_{z'})\,\phi(\vec r = D^T\vec r\,') \overset{?}{=} D\vec\nabla\phi$

hiervon die j-te Komp. $(x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3)$ ist

$$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x'_j}\phi\left(\overset{\text{l.te:}}{}(D^T)_{lm}x'_m = D_{ml}x'_m\right) = (\partial_{x_l}\phi)\,D_{ml}\,\delta_{mj}$$

$$= D_{jl}\,\partial_{x_l}\phi = (D\vec\nabla\phi)_j$$

$\Rightarrow$ also ist $\quad \vec\nabla'\phi = D\vec\nabla\phi \quad \forall\,\phi$ ■

$\vec\nabla$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec e_j$ in $\vec\nabla = \vec e_1\partial_x + \vec e_2\partial_y + \vec e_3\partial_z$

andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

$$\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_{\text{Weg n. oben}} + \vec e_\vartheta\,\partial_{\text{Weg n. Süden}} + \vec e_\varphi\,\partial_{\text{Weg n. Moskau}}$$

$\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = (Sc,\ Ss,\ C) \qquad S \equiv \sin(\vartheta)$

$\vec e_\varphi = \quad (-s,\ c,\ 0) \qquad\qquad s \equiv \sin(\varphi)$

$\vec e_\vartheta = \quad (Cc,\ Cs,\ -S)$

((s. Kap. 6 ; $\quad$ zu $\vec e_\varphi$: 

$\quad \vec e_\varphi = \frac{(-y,\,x,\,0)}{1 \times 1} = \frac{(-Ss,\,Sc,\,0)}{S}$

zu $\vec e_\vartheta$: $\quad \vec e_\varphi \times \vec e_r = \vec e_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Moskau: $(rS)\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi}$$

Dimension: $\quad [\vec\nabla] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\,rhs\,]$ ✓

Bsp $\quad \vec\nabla\,\phi(r) = \vec e_r\,\partial_r\,\phi(r) = \vec e_r\,\phi'(r)$