$\underset{\sim\sim\sim}{\gamma = \omega_0}$: nur 1 Lsg ? falsch !

studiere $\omega_0 \to \gamma$: $\Gamma = \varepsilon$, dann $\varepsilon \to 0$

$$x_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon t}\right) \quad , \quad e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(\underbrace{C_1 + C_2}_{} + \underbrace{(C_2 - C_1)\varepsilon}_{} t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(A + B t\right)$$

④ neue Fkt. (viele Möglichkeiten !)

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\boxed{y' + P(x)\,y = Q(x)}$

y_{hom}: $\frac{y'}{y} = \ln(y)'^{x} = -P(x)$

$$\ln(y) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$$

Setze $y = y_{hom} \cdot u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\, u(x)$

$$\Rightarrow \cancel{-P e^{-} u} + e^{-} u' + \cancel{P e^{-} u} = Q$$

$$u' = Q e^{+} \quad , \quad u = \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int^{x'}\cdots} + C$$

$$y_{allg}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\left(C + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')}\right)$$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten ?↯ Nein, nur 1 : bei (x_0, x_1)-Änderung ändert sich C.

⑤ Variation der Konstanten

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\boxed{y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)}$

<u>wenn</u> man <u>eine</u> Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt,

dann reduziert $y = y_1 \cdot u$ die Ordnung um 1.

$$\ulcorner\ \partial_x^n\, f\cdot g = \left(\partial_x^{\text{vorne}} + \partial_x^{\text{hinten}}\right)^n f\cdot g\ \lrcorner$$

$$\underset{\sim\sim}{y_1'' u} + 2 y_1' u' + y_1 u'' + \underset{\sim\sim}{a y_1' u} + a y_1 u' + \underset{\sim\sim}{b y_1 u} = f$$

$\sim\sim = 0$ nach Voraussetzung

haben also $y_1 u'' + (2y_1' + a y_1) u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a\right) v = f/y_1$

ist l.O. $\Rightarrow$ nun P-Q-Formel!

⑥ Trennung der Variablen

((erstmals nicht-linearer Fall))

$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$, alle y nach links

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{=\partial_y H(y)} y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=\partial_x F(x)}$$ Stammfktn suchen

$\partial_x H(y(x)) = \partial_x F(x)$ $\Rightarrow$ $H(y) = F(x) + C$

((zur Not: $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$))

⑦ Reduktion(en) der Ordnung

ⓐ $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^{y} y'^{x} = p'^{y} p$

$\Rightarrow$ $p'^{y} = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl 1.O. für $p(y)$

Bsp: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = \left(\frac{m}{2} v^2\right)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

ⓑ $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl 1.O.

ⓒ Landau-Trick: wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2 y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = b(t)$

$$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1}\underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} = b(t)$$, löse $(\partial_t + i\omega) u = b(t)$ usw.

⑧ Dgl. $\geq$ 2.O. $\underset{(\longleftarrow)}{\longrightarrow}$ Dgl-System 1.O.

((geht immer; Computer froh über System))

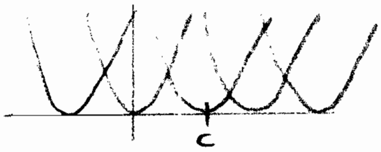
Bsp $y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array}\right\}$

⑨ singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

Bsp $y'^2 = 4y$, $y' = \pm 2\sqrt{y}$, TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' = \pm 1}$ $= \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{*} = \pm 1$, $\sqrt{y} = \pm x + C$, $y = (\pm x + C)^2$, $y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch! — "singuläre Lsg"

$\left\{\begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array}\right\}$

⑩ Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem: $L y(x) = f(x)$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L\, G(x,a) = \delta(x-a)}$

Wenn Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

dann $\int_B da\, f(a)\, L\, G(\overset{\text{wirkt}}{x}, a) = \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$L \underbrace{\int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{= y(x)} = f(x)$

$\Rightarrow$ ein G gibt ein y, d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache-Antworten G zusammengesetzt.))

Bsp $\dot{v} = -g$ (freier Fall), $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich: $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten: $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$$\Rightarrow v(t) \overset{!}{=} \int_0^T da\, \big(\Theta(t-a) + A\big)(-g)$$

$$= -g \int_0^t da \underbrace{- gAT}_{C} = -gt + C$$

Bem.: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

allg.: wenn L "translationsinvariant",

d.h. $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; nicht $x\partial_x$),

dann genügt es, $L\, G(x) = \delta(x)$ zu lösen,

und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

Bsp $\dot{v} + \gamma v = k(t)$

((hat via "P-Q-Formel" (4) $(P = \gamma,\ \int^t dt' P = \gamma t)$

die allg. Lsg. $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt'\, k(t') e^{\gamma t'}\right)$))

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma)\, G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans ("γ muß weg") $G(t) = u(t) e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow$ $u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$

$u' = \delta(t) e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1$, $u = \text{const}_t + \Theta(t)$

also $G(t) = \left(\text{const}_t + \Theta(t)\right) e^{-\gamma t}$

und $v(t) \overset{!}{=} \int_0^T da\, k(a) \left(\text{const} + \Theta(t-a)\right) e^{-\gamma(t-a)}$

$\overset{!}{=} e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, k(a) e^{\gamma a}\right)$ ✓✓.

Bem.: • L mußte nur linearer Op. sein: es gibt viele L's.

• Punkt-Ursache in höheren Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\,\delta(t)$.