- Punktmasse (M) am Ursprung

$$\rho(\vec r) = C\,\delta(\vec r)\;, \quad M \overset{!}{=} \int d^3r\; C\,\delta(\vec r) = C \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec r) = M\,\delta(\vec r)$$

- Punktladung (m, q) mit $\vec r_0(t)$

((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))

$$\rho(\vec r, t) = q\,\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

$$\vec j(\vec r, t) = \dot{\vec r}_0(t)\; q\;\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

(($\Rightarrow$ Teilchenstrahlen ; DESY; CERN !))

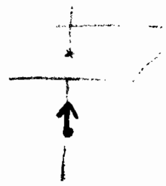
<u>Bsp</u> Q und I zu $\vec r_0(t) = vt\,\vec e_3 = (0, 0, vt)$

$$Q = \int d^3r\,\rho(\vec r) = q\int d^3r\;\delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$$

$$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec f\cdot\vec j = \int dx\int dy\;\vec e_3\cdot v\vec e_3\, q\,\delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$$

$$= vq\int dx\int dy\;\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(0 - vt)$$

$$= vq\,\delta(vt) = q\,\delta(t)$$



- Hohlkugel (M,R) im Ursprung

$$\rho(\vec r) = \alpha\,\delta(r - R)\;, \quad M \overset{!}{=} \int d^3r\;\alpha\,\delta(r-R) = \alpha\,4\pi\int_0^\infty dr\,r^2\,\delta(r-R) = \alpha\,4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r - R)$$

<u>Bsp</u> Gravitationspotential einer Hohlkugel (M,R) (vgl. Ü 64)

((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))

$$V(\vec r) = -\gamma m\,\frac{2\pi}{r}\int_0^\infty dr'\,r'\,\frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r' - R)\left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$$

$$= -\gamma m\,\frac{M}{2Rr}\left[\,|r+R| - |r-R|\,\right] \qquad \left[\,|r+R| - |r-R|\,\right] = \begin{cases} 2R & \text{für } r > R \text{ (außen)} \\ 2r & \text{für } r < R \text{ (innen)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\[2mm] -\dfrac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$$

(($\Rightarrow$ <u>innen</u> <u>keine</u> Kraft ! Hohlwelt $\Rightarrow$ umsonst nach USA, nur abstoßen ; Realität ? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche !))

((Metallbügel wie Holzbügel, denn:

Elektrostatik ⇒ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec{K} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ aus.

(Kenne $\vec{K}$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec{K} \stackrel{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi$, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$

"Coulomb-Potential"))

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS, auf etwas höherem Niveau

WS-Lösungsmethoden: Ansatz, $u+a$, $v=\frac{1}{y}$, $e^{\lambda t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x + m k(t)$$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist gewöhnlich ($\neq$ partiell: $(\partial_t - \partial_x) y = u(x,t)$),

2. Ordnung (max. '-Anzahl),

linear (y, y', y'' hoch eins),

inhomogen ($f \neq 0$),

explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y'' + \omega^2 y = b_0$, d.h. $L_2 y = b_0$ mit $L_2 = \partial_x^2 + \omega^2$

hat $y_{allg.}(x) = \underbrace{\frac{b_0}{\omega^2}}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen}} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK (Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x)\,, \quad \text{mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \ldots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- $\bullet$ $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$
- $\bullet\bullet$ Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$
- $\bullet\bullet\bullet$ Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$, wobei y_{sp} <u>eine</u> spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

- $\bullet$ denke an Newton. kann bei $x = 0$ starten mit AB $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder ...

  $\Rightarrow$ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)
- $\bullet\bullet$ hat n und löst $L_n y = 0$
- $\bullet\bullet\bullet$

$$\begin{array}{l} L_n y_{allg} = f \\ L_n y_{sp} = f \\ \hline L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0 \end{array}, \quad \text{d.h. } y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$$

))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon $F'=f$ ganz fast nie!

① Potenzansatz $x^2y''-2xy'+2y=0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{-}=\partial\text{-Potenz}}$

$y=x^\lambda$, $\lambda(\lambda-1)\underline{x^2x^{\lambda-2}}-2\lambda x x^{\lambda-1}+2x^\lambda=0$

$\lambda^2-3\lambda+2=0$, $\lambda=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

$\Rightarrow y_{allg}=C_1x+C_2x^2$

② neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x=x(\tau)$

benutze $y(x)=y(x(\tau))=u(\tau)=u(\tau(x))$

habe $y'=u'^{\tau}\cdot\tau'^{x}$ usw. $(y'',\dots)$

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $x^2y''-2xy'+2y=0$ (s.o.), $0<x$

setze $x=e^\tau$; $y(x)=y(e^\tau)=u(\tau)=u(\ln(x))$,

$y'=u'^{\tau}\frac{1}{x}=u'^{\tau}e^{-\tau}$, $y''=u''\frac{1}{x^2}-\frac{u'}{x^2}=u''e^{-2\tau}-u'e^{-2\tau}$,

erhalte $e^{2\tau}(u''-u')e^{-2\tau}-2e^\tau u'e^{-\tau}+2u=0$

$u''-3u'+2u=0$ (*)

③ e-Ansatz : bei $\boxed{\text{lin, hom, } \underline{\text{konst}} \text{ Koeff.}}$

Bsp (*) mit $u=e^{\omega t}$ gibt $\omega^2-3\omega+2=0$ $\Rightarrow\omega=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

$u_{allg}=C_1e^\tau+C_2e^{2\tau}$

Bsp $(\partial_t^2+2\gamma\partial_t+\omega_0^2)\,x(t)=0$ (harm. Oszi. mit Reibung)

$x=e^{\omega t}$, $\omega^2+2\gamma\omega+\omega_0^2=0$, $\omega=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ ($\underline{\omega_0<\gamma}$)

$x_{allg}(t)=C_1e^{-\gamma t-\Gamma t}+C_2e^{-\gamma t+\Gamma t}$

$\underline{\gamma<\omega_0}$: $\omega=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$