Bemerkung: "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.

nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.

man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,

lediglich sieht man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

2. Def. ("definierende Eigenschaft")
$$\boxed{\int dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)}$$

((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

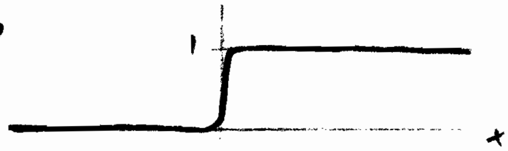
Bem.: Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

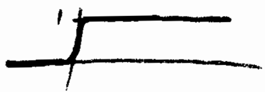
3. Def. $\boxed{\delta(x) := \partial_x \Theta(x)}$

wobei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist,

also eine im ε-Bereich von

0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \Theta(x)$

∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow \delta(x) = \partial_x \Theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\Theta(x)$:

$$b>a, \quad \int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \Theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$$

Test via Part. Int. $\quad u' \quad v$; $\quad u = F(x) \quad v' = \delta(x-a)$

$$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) = F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$$

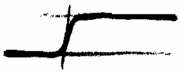
"$\Theta(0) = ?$" — kranke Frage!

δ-Darstellungen

- $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

  denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int rhs = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x\to\varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

  (("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$" $\Rightarrow$ $1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

- $\Theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

  $\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

- $\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int dx\, \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{=\pi,\ \text{später...}}$ ((s.u.))

  $= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \left(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i \sin(kx) \right)$ weil ungerade , Euler

  $= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$

- $\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

  $\delta(x) = \partial_x (\ \text{"}\ ) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix} \right)$

  $= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(\underbrace{e^{ikx - \varepsilon k}}_{\text{denn } = \partial_k \frac{e^{ikx-\varepsilon k}}{ix - \varepsilon}} + \text{c.c.} \right)$

  $= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx)$, $e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon |k|}$

  $= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\varepsilon|k|} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right)$ weil ungerade

  $= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx} e^{-\varepsilon|k|}$ ⇐ Fourier! (später)

  ((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon|k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int d$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\overset{\varepsilon\to 0^+}{\varepsilon}|x|}$, $\partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon|x|} = 2\int_0^\infty dx\, \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) e^{-\varepsilon}$

$= \frac{2\varepsilon}{k^2+\varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_k + 2\arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in k $\Rightarrow$ Const $= 0$

$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi$ $\Rightarrow$ $\int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

- allg. Darst. $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

  aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

δ-Formeln

- Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\delta(-x) = \delta(x)$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))
- etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$
- 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec r-\vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec r-\vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  $\Rightarrow$ kann kartesisch denken und $\delta(\vec r) = \begin{cases} 2D: & \delta(x)\delta(y) \\ 3D: & \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$

  schreiben, muß aber nicht (→ Ü 66 f–h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$$

Physik mit δ

Kann mit δ Häute, Drähte, Punkte in 3D formulieren.

Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -\gamma m \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$)

bleiben gültig, nur $\rho(\vec r)$ $\left(= \frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}\right)$ spezialisiert sich.

z.B. • hom. Scheibe (M,R): $\rho(\vec r) = A\, \delta(z)\, \Theta(R-\varrho)$

$$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec r) = A \int_0^R d\varrho\, \varrho \underbrace{\int d\varphi}_{(2\pi)} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A\frac{R^2}{2}2\pi \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$$

• hom. Stab (M,L): $\rho(\vec r) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \Theta(x(L-x))$

$$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \Rightarrow B = \frac{M}{L}$$