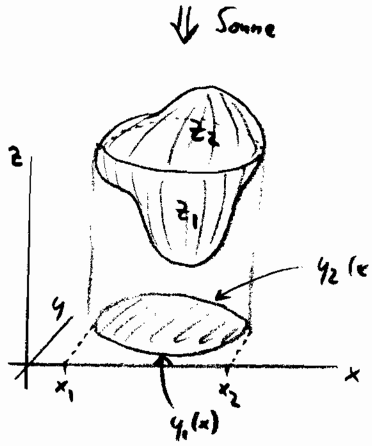
Volumenintegral



gegeben: $\frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}} =: \phi(x,y,z)$

und V, d.h. $x_1, x_2, y_1(x), y_2(x)$

und $z_1(x,y), z_2(x,y)$.

$dx\, dy\, dz =: d^3r$

$$\left.\begin{matrix}\text{Gesamtes}\\ \text{etwas in } V\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r\, \phi$$

Auswertung kartesisch
$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \;\; \phi(x,y,z)$$

↳ Würfel in Säule bei x,y

↳ Σ Säulen in Scheibe bei x

↳ Σ Scheibchen

wenn $\rho(\vec r) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$, dann (gesamte Ladung in V) $= Q_V = \int_V d^3r\, \rho(\vec r)$

wenn $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Vol.}}$, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{Vol.}\\ M\\ M\vec R\\ I_{jk}\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r \left\{\begin{matrix}1\\ \rho\\ \rho\cdot\vec r\\ \rho(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\end{matrix}\right.$$

$$V(\vec r) = -\gamma m \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

4 Fragen

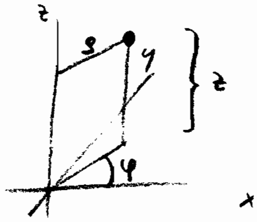
1) $V_R \overset{?}{=} \int_V d^3r \cdot 1$
$= 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, JA.

2) obige Formeln ohne V-Index schreiben, d.h. $\int$ über ganzen Raum? JA, $\rho := 0$ außerhalb V.

3) Wie folgen $\int_{\text{Draht}}$, $\int_{\text{Haut}}$ aus $\int_V$? $\Rightarrow$ s. § 6.6

4) 3D "runde" Koord.? $\Rightarrow$ jetzt, § 6.5.

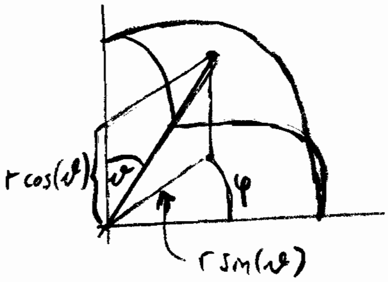
6.5. Krummlinige Koord.



Zylinderkoord. : ϱ, φ, z

$x = \varrho \cos(\varphi)$
$y = \varrho \sin(\varphi)$
$z = z$

$d^3r = \underbrace{d\varrho \, \varrho \, d\varphi \, dz}_{\text{Länge}^3 \checkmark}$ = "Balkon-Vol. am Wasserturm"



Kugelkoord. : r, ϑ, φ

$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$
$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$
$z = r \cos(\vartheta)$

$d^3r \stackrel{!}{=}$ Höhe · (NS-Breite) · (W-O Breite)

$\stackrel{!}{=} dr \cdot r\, d\vartheta \cdot r \sin(\vartheta)\, d\varphi$

$\stackrel{!}{=} dr \; \underbrace{r^2 \, d\vartheta \sin(\vartheta)\, d\varphi}_{\stackrel{!}{=} r^2 d\Omega}$; $d\Omega$ = Haus-Grundfläche$/r^2$

$\longrightarrow$ "Haus-Grundfläche"

Bsp $V_R \stackrel{!}{=} \int_{\text{Kugel}(R)} d^3r \cdot 1$

$\stackrel{!}{=} \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta)}_{2} \underbrace{\int_{(2\pi)} d\varphi}_{2\pi}$

$\left(\Rightarrow \int d\Omega \stackrel{!}{=} 4\pi \right.$ = der max. Raumwinkel

$\stackrel{!}{=} S_R/R^2 \Rightarrow S_R = 4\pi R^2 \checkmark\checkmark \left. \right)$

$= \frac{4\pi}{3} R^3 \checkmark\checkmark$

Gravi-Pot. bei kugelförmiger Massenverteilung $\rho(r)$:

ohne Pfeil

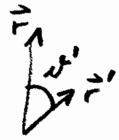
$$V(\vec r) = -\gamma m \int d^3 r' \, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

Nenner $= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r \vec r'}$

$$= -\gamma m \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{(2\pi)} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \frac{1}{\sqrt{}}$$

während $\vec r'$-Integration ist $\vec r$ fest.

$\Rightarrow$ orientiere $\vec r'$-Kugelkoord. um $\vec r$ als "z-Achse"



$\Rightarrow \vec r \vec r' = r r' \cos(\vartheta')$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta' \frac{\sin(\vartheta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\vartheta')}}$$

generell:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) f(\cos(\vartheta)) = \int_{-1}^1 du\, f(-u) = \int_{-1}^1 du\, f(u)$$

Subst. $u = -\cos(\vartheta)$

$du = d\vartheta \sin(\vartheta)$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'u}} = \partial_u \frac{1}{rr'} \sqrt{} \right)$$

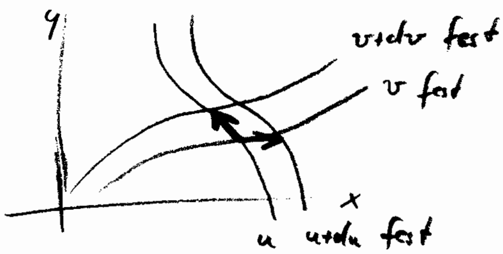
$$= -\gamma m \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right]$$

Wurzel ziehen? Vorsicht! (Beträge)

Jacobi-Determinante

allg. krumme Koord., hier 2D ((denke an Polar-Koord.)):

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned} \right\} \vec r(u,v)$$



$d^2 r = |d\vec r_1 \times d\vec r_2|$

mit $d\vec r_1 = du \, \partial_u \vec r$

und $d\vec r_2 = dv \, \partial_v \vec r$.

$$d^2r = du\,dv\,\left|(\partial_u x, \partial_u y, 0) \times (\partial_v x, \partial_v y, 0)\right|$$
$$= du\,dv\,\left|\left(0, 0, (\partial_u x)\partial_v y - (\partial_u y)\partial_v x\right)\right|$$
$$= du\,dv\,\left|\underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Det.}}\right| \qquad \left(\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} d^2r = du\,dv\,|J| \\ \text{mit} \quad J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} =: \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{array}}$$

Bsp Test mit Polarkoord: $u = r$, $v = \varphi$

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$
$J = \begin{vmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{vmatrix} = r$ ✓✓

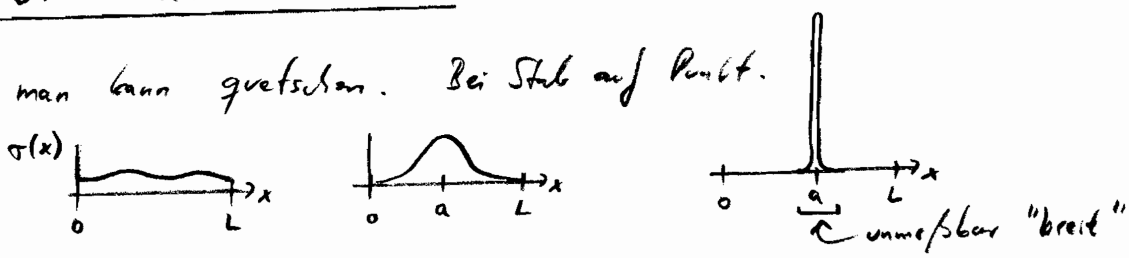
Bsp Test mit Kugelkoord: ... $d^3r = du\,dv\,dw\,|J|$

... $J = \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} = r^2 \sin(\vartheta)$ ✓✓

Durchatmen! bisher: anstrengend!
jetzt: einfach! und schön...

6.6. Delta-Funktion (der Physiker)

man kann quetschen. Bei Stab auf Punkt.



M bleibt konstant. $\int_0^L dx\, \underbrace{\frac{\sigma(x)}{M}}_{\to\, \delta(x-a)} = 1$

1. Def. $\boxed{\begin{array}{l} \delta(x) := \text{gerade unmeßbar eng} \\ \text{bei } x=0 \text{ konzentrierte Fkt} \\ \text{mit } \int dx\, \delta(x) = 1 \end{array}}$

"eng":