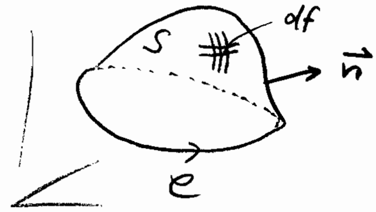
Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\rho_0 = 1$, $a = 1$ ist

$$\pi = \int d^2r\, e^{-r^2} = \int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2} = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\ , \qquad \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Oberflächen-Int.



gegeben: S, Rand $\mathcal{C}$ mit Richtung,

$$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec r)\,,\ \vec A(\vec r)\,.$$

Sei $\vec n$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

$\Rightarrow$ kann $df \cdot \vec n =: d\vec f$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df \cdot \begin{cases}\phi \\ \vec A\end{cases}$, $\int_S d\vec f \begin{cases}\phi \\ \cdot \vec A \\ \times \vec A\end{cases}$

Anwendungs-Bsp: Strom durch Fläche $S =: I_S$

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec j$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}\ , \qquad \vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}\,\vec e$$

nur $j_{\perp S} = j_{\parallel \vec n}$ erzeugt Strom $df \cdot j_{\parallel \vec n} = df\,(\vec j \cdot \vec n) = d\vec f \cdot \vec j$

$$\Rightarrow I_S = \int_S d\vec f \cdot \vec j(\vec r)$$

Ausrechnen?! S gegeben $\Rightarrow$ finde $\vec r(s,t)$

kann $\partial_s \vec r =: \vec r\,'$ und $\partial_t \vec r =: \dot{\vec r}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec f$:

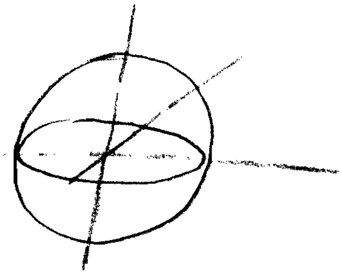
$$d\vec r_1 = ds\ \vec r\,'\ , \qquad d\vec r_2 = dt\ \dot{\vec r}$$

$$d\vec f = d\vec r_1 \times d\vec r_2 = ds\,dt\ \vec r\,' \times \dot{\vec r}$$

$$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\,dt\ \underbrace{(\vec r\,' \times \dot{\vec r}) \cdot \vec j}_{\text{von } s,t \text{ abhängig}}$$

$\Rightarrow$ habe auf ebenes Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$$S_R = 2 \cdot \int_{S_{oben}} df$$

s, t : Polarkoord. ϱ, φ in xy-Ebene

$$\vec{r}(\varrho,\varphi) = \left(\varrho \cos(\varphi),\ \varrho \sin(\varphi),\ \sqrt{R^2-\varrho^2}\right)$$

$$S_R = 2 \int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \ |\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}| \cdot \{\phi = 1\}$$

$$\vec{r}\,' = \partial_\varrho \vec{r} = \left(c, s, -\frac{\varrho}{\sqrt{\ }}\right), \quad \dot{\vec{r}} = \partial_\varphi \vec{r} = (-\varrho s, \varrho c, 0)$$

$$\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}} = \left(\frac{\varrho^2 c}{\sqrt{\ }}, \frac{\varrho^2 s}{\sqrt{\ }}, \varrho\right) \quad \left(= \frac{\varrho}{\sqrt{\ }}\vec{r}\right)$$

$$|\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}| = \sqrt{\frac{\varrho^4}{\sqrt{\ }^2} + \varrho^2 \frac{\sqrt{\ }^2}{\sqrt{\ }^2}} = \frac{\varrho R}{\sqrt{\ }}$$

$$= 2 \cdot 2\pi R \int_0^R d\varrho \underbrace{\frac{\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}}_{= \partial_\varrho\left[-\sqrt{R^2-\varrho^2}\right]}$$

$$= 4\pi R^2$$

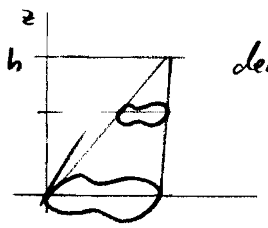
Test Kugelvolumen V_R

Könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, $\sim$ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int$ Pyr.-Vol. $= \int df \cdot R \cdot \lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $= \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe



denn: $$V_{F,h} = \int_0^h dz \cdot F \cdot \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{F}{h^2}\left[h^2 z - h z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} F h \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \overset{?}{=} \frac{1}{3} \cdot R \cdot 4\pi R^2 \quad ✓✓$$

((Welt nicht nur aus Drähten, Hüten usw — auch aus Kartoffeln!))