1D Newton, $K(x)$ (evtl. unlösbar)

$$m\ddot{x} = K(x) = -\partial_x V(x) \qquad \| \cdot \dot{x}$$

$$\partial_t \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\partial_t V(x(t))$$

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}$$

((immerhin eine Ableitung weniger!))

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{E-V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (*)$$

(B): $\partial_t [\,?\,] = C \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$, $C = \dots$, nach x auflösen

(($[\,?\,]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$ bzgl. x))

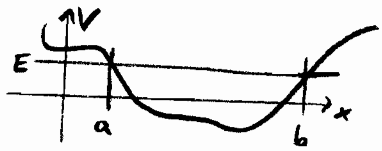
(A): ((finde $[\,?\,]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:))

Strategie: $(*) \cdot dt$ ($\dot{x}\,dt = dx$) und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E-V(x')}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx \, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Periode T ?



$$T = 2\int_a^b dx \, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Arbeit (1D) $:=$ Kraft · Weg

$=$ Σ (dWeg) · Kraft

$=$ pos., wenn Weg in Richtung Kraft

$=$ dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$$A = \int_a^b dx \, K(x) = -\int_a^b dx \, \partial_x V(x)$$

$$= V(a) - V(b)$$

6.3. Integrations-"Methoden"

((≙ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x (uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx\, uv'$$

Bsp: $I = \int_0^1 dx\, \underbrace{2x}_{u'}\, \underbrace{\ln(x)}_{v} = \underbrace{[x^2 \ln(x)]_0^1}_{\doteq 0} - \int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} + 0$

$u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial_x}$:

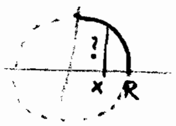
$$\doteq \int_0^1 dx\, \ln(x)\, \partial_x x^2 = -\int_0^1 dx\, x^2\, \partial_x \ln(x) = -\int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a,b), $\to t = t(x)$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt}\, f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) – Fläche



$$F_{(R)} = 4 \int_0^R dx\, \sqrt{R^2 - x^2}$$

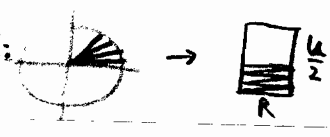
setze $x = R \sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi\, R\cos(\varphi)\, R\sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser? aus $U = 2\pi R$: 

, $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

__Bsp 2__

$$I = \int_0^1 dx \; 2x \; \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t, \; \dot{x} = e^t$

$\underset{u}{x} = 0$ bei $t = -\infty$, $\underset{o}{x} = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^{0} dt \; e^t \, 2e^t \, t \qquad ⟪ \text{nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1 ⟫$$

$$= -2 \int_{\infty}^{0} dt \; e^{-2t}(-t) = -2 \int_0^{\infty} dt \; t e^{-2t} \qquad ⟪ t \to \tfrac{t}{2} ⟫$$

$$= -\tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \; \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \; t(-\partial_t)e^{-t} = -\tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \; e^{-t} = -\tfrac{1}{2} \quad (\text{s.} \downarrow)$$

__Bsp 3__ ⟪ „uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche ⟫

$$\int_0^{\infty} dx \; \underbrace{e^{-x}}_{=t,\; x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt \left(-\frac{1}{t}\right) t = \int_0^1 dt = 1$$

__... als ∂_α von ...__ (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^{\infty} dx \; x^n e^{-x} = \left[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^{\infty} dx \; e^{-\alpha x}}_{= 1/\alpha} \right]_{\alpha=1} = \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right]_{\alpha=1} = n!$$

⟪ $(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2}$, $(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3}$, ... ⟫

__... als Parameter-abhängig__ (vgl. Übung, Aufgabe 45)

$$\partial_8 = -\beta \partial_\beta \ln\left(\int_0^{\infty} dx \; \frac{x}{e^{\beta x}+1} \right) = -\beta \partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} dx \; \frac{x}{e^x+1} \right)$$

$$= -\beta \partial_\beta \left[-2\ln\beta + \ln(\textstyle\int \ldots) \right] = 2$$

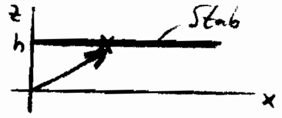
6.4. Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

Integral = Summe. also

$$\int_a^b dx\, \vec{F}(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x) , \int_a^b dx\, f_2(x) , \dots \right)$$

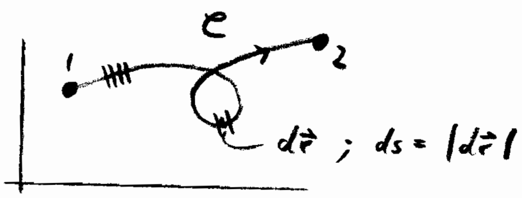
Bsp:



$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_0^L dx\, \sigma(x)\, (x, 0, h) = (R_1, 0, h)$$

Schwerpkt.

Kurvenintegral



"C gegeben" = $\vec{r}(t)$, t_1, t_2 .

Raumkurve ($\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec{r}_1$-Angabe)

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von $C = \int_C ds = \int_1^2 ds$

$M = \int_1^2 ds\, \sigma(\vec{r})$ Draht-Gesamtmasse

$M\vec{R} = \int_1^2 ds\, \sigma(\vec{r})\, \vec{r}$ Draht-Schwerpkt

$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec{r}\,')\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ Draht-Gravi-Pot.

$A = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K}$ Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec{K}$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

$d\vec{r} = dt \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$, bzw. $ds = dt \cdot |\dot{\vec{r}}|$

z.B. $A = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{K}(\vec{r}(t))$

folgendes "Rezept" nützlich: