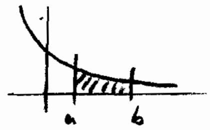
$\int \to$ dimensionslos   z.B.: $\int_0^{t_1} dt\ v(t) = \int_0^{t_1} dt\ v_0 f(\omega t)$, $t \to \frac{1}{\omega} t$

$= \frac{v_0}{\omega} \int_0^{\omega t} dt\ f(t)$

$\int$ aus Σ (Scheibchen)   z.B.:



$$\int_a^b dx\ e^{-x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)}{N} e^{-\left(a + n\frac{b-a}{N}\right)}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N} e^{-a} \frac{1 - e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$

$$= e^{-a}\left(1 - e^{-b+a}\right) = e^{-a} - e^{-b}$$

$$\left(\left(\Rightarrow \int_0^\infty dx\ e^{-x} = 1 \right)\right)$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a}$$ ((geht das immer? s.u.))

"Hauptsatz"

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \partial_b F(b)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) + C$$

$b \to a$: $0 = F(a) + C$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$

Kommentare zum Hauptsatz

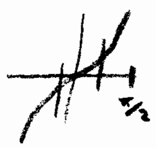
- •1 hilft nur, falls man $f = \partial_x F$ lösen kann
  (($f = \sin(x^2) = \partial_x\,(\,???\,)$))

- •2 warum er gilt: $\int_a^b dx \, \frac{dF}{dx}$ = F-Zunahme ab $F(a)$

- •3 Anwendung: $\int_a^b dx \; /\!/\!/\!/ = \int_a^b dx \; \partial_x \, [\;??\;] = [\quad]_a^b = [\quad]_{x=b} - [\quad]_{x=a}$

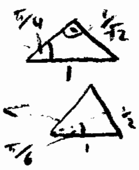
- •4 Wunschtabelle: $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.
  wenn jedoch (s. <u>Bronstein</u> etc.) „$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$",
  dann <u>lese</u> dies als Tabelle (nicht als Gleichung: c ?!)

- •5 F in Tabelle gefunden
  → zitieren, z.B. [Bronstein, 57]
  → Probe, also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden
  ((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))

- •6 <u>Bsp</u>: $\mathcal{J}_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \, \tan(x)$  ungerade!

$$= \int_{+\pi/6}^{\pi/4} dx \, \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \,, \qquad \partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$= \left[-\ln(\cos(x))\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \,, \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \,, \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{2}$$



$$= \ln(\sqrt{2}) - \left[-\ln\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\ln(2) + \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

- •7 $\int_a^\infty dx \, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx \, f$: wenn endlich, dann: „es <u>existiert</u>".

  Bsp: existiert $\int_0^\infty dx \left(\ln(1+e^x) \underbrace{-x}_{=\ln(e^{-x})}\right)$?
  $\to = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!

- •8 „Kandidaten-Methode":

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^1 dx \, \arctan(x) = \int_0^1 dx \; \partial_x \, [\,?\,]$$

$$\partial_x \, x\cdot\arctan(x) = \arctan(x) + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=\partial_x(?)} \,, \qquad \partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

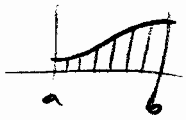
$$\Rightarrow [\,?\,] = x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= \arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\ln(2) \qquad \left(\left(\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1 \;\checkmark\right)\right)$$

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration!

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar h$, Verallg.:



$$\bar f = \frac{\sum f's\ dx}{\text{Anzahl } dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2 \quad \text{, etc.}$$

Eigenschaften: $\overline{\alpha f+\beta g} = \alpha\bar f + \beta \bar g$, $\bar 1 = 1$

Schwankung: $\Delta f = \sqrt{\overline{(f-\bar f)^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - \overline{2f\bar f} + \bar f^2}$

$= \sqrt{\overline{f^2}-\bar f^2}$

Bsp harm. Oszi., $x(t) = A\cos(\omega t)$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega^2 = \frac{\kappa}{m}$ $\left(\left(m\ddot x = -\kappa x\right)\right)$

↖ Periode $\qquad = -\partial_x \frac{\kappa}{2}x^2$

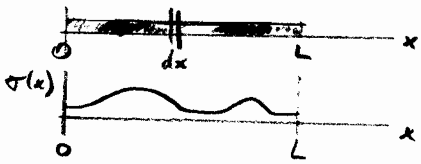
$$\bar x = \frac1T\int_0^T dt\; A\cos(\omega t) = 0$$

mittl. kin. E $\rightsquigarrow \bar T = \frac1T\int_0^T dt\;\frac m2 \left(A\omega \underbrace{\sin(\omega t))^2}_{\hookrightarrow \frac12} = \frac m4 \omega^2 A^2$

mittl. pot. E $\rightsquigarrow \bar V = \frac1T\int_0^T dt\;\frac\kappa2 \left(A\,\underbrace{\cos(\omega t))^2}\right. = \frac\kappa4 A^2 = \bar T$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac2\kappa \bar V} = \frac{1}{\sqrt2}A$$

$\sigma(x)$ Massendichte



$$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$$

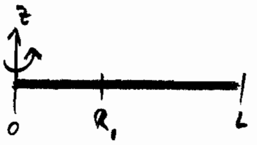
$M = \sum_a m_a \longrightarrow M = \int_0^L dx\;\sigma(x)$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac1M\sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac1M\int_0^L dx\;\sigma(x)\,x$ Schwerpkt.

Erinnerung (§4): Drehimpuls $\vec L = \vec r\times\vec p = \vec r\times m(\vec\omega\times\vec r) \equiv I\vec\omega$ — winkelgeschw.

Trägheitstensor

starrer Körper, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot& I_{33}\end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2+y_a^2)$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\,\omega \end{pmatrix}$$

$$I_{33} = \sum_a m_a \left(x_a^2 + y_a^2 \right) \longrightarrow I_{33}^L = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$$

Achse durch Ursprung

$$= \int_0^L dx\, \sigma(x) \left[(x-R_1)^2 + 2R_1 (x-R_1) + R_1^2 \right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + M R_1^2 \qquad \text{„Satz v. Steiner"}$$

Achse durch Schwerpkt.

Superposition   Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec{r}_a$ ziehen m bei $\vec{r}$ an:

$$V(\vec{r}) = \sum_a \left(- \frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \right)$$

dünner Stab auf x-Achse: $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

$\rightsquigarrow$ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

1D Newton, $K(t)$ $\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m} K(t), \quad v(t_0) = v_0}$

(A) • Integral sinnvoll, wenn
- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will:

$$\underbrace{\int_{t_0}^t dt'\, \partial_{t'} v(t')}_{v(t) - v(t_0)} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'\, K(t')$$

(B) • Integral nicht sinnvoll, wenn $K(t)$ aufleitbar ist:

$$\boxed{\dot{v} = \alpha \omega \cos(\omega t), \quad v(t_0) = v_0}$$

$$= \alpha\, \partial_t \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow v = \alpha \sin(\omega t) + C_1$$

$$v_0 = \alpha \sin(\omega t_0) + C_1 \quad \Rightarrow C_1 \, ;$$