((Raumzeitliche FT: reine Konvention

$$\vec E(\vec r,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^3k\, d\omega\; e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\tilde{\vec E}(\vec k,\omega)$$

mit $\tilde{\vec E}(\vec k,\omega) = \int d^3r\, dt\; e^{-i\vec k\vec r + i\omega t}\,\vec E(\vec r,t)$))

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{tikzcd} \boxed{f\text{-Gln.}} \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, "f=\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f \text{ einsetzen}"] & \boxed{\text{Lösung } f} \\ \boxed{\tilde f\text{-Gln.}} \arrow[r, "\text{lösen}"] & \boxed{\text{Lösung } \tilde f} \arrow[u, "\text{``nur noch'' Integrieren!}"'] \end{tikzcd}$$

Bsp Elektrostatik

will $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec\nabla\times\vec E = \vec 0$ lösen

Abstieg:
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, \underbrace{\begin{Bmatrix}\vec\nabla\cdot\\ \vec\nabla\times\end{Bmatrix} e^{i\vec k\vec r}}_{=\underbrace{\vec\nabla e^{i\vec k\vec r}}_{=i\vec k e^{i\vec k\vec r}}\begin{Bmatrix}\cdot\\ \times\end{Bmatrix}}\,\tilde{\vec E}(\vec k) = \begin{cases}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho(\vec k)\\ 0\end{cases}$$

$$\boxed{\vec\nabla \to i\vec k}$$

Koeff-Vergl.:
$$i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho \qquad (\tilde 1)$$
$$i\vec k\times\tilde{\vec E} = \vec 0 \qquad (\tilde 2)$$

Lösen:
$$i\vec k\times(\tilde 2) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec k\,(\underbrace{i\vec k\cdot\tilde{\vec E}}_{(\tilde 1)\text{ einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec E} = \vec 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec E}(\vec k) = -\frac{i\vec k}{\varepsilon_0 k^2}\,\tilde\rho(\vec k)$$

Aufstieg:
$$\vec E(\vec r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, \underbrace{e^{i\vec k\vec r}\,(-i\vec k)}_{=-\vec\nabla e^{i\vec k\vec r}}\,\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\,\underbrace{\tilde\rho(\vec k)}_{=\int d^3r'\, e^{-i\vec k\vec r'}\rho(\vec r')}$$

$$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{4\pi}{k^2}\,e^{i\vec k(\vec r-\vec r')}}_{\equiv K(\vec r-\vec r') = \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\ \ (\text{s.u.})}\,\rho(\vec r')$$

$$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec r-\vec r'|}$$

(($K(\vec r) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(kr)}{k}}_{=\pi/2} = \frac{1}{r}$, $\boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$1 = \int dx\,\delta(x) = \int dx\,\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\,\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$, $x\to\varepsilon kr$ ∎

FT → FR

$$f(x) - f(x+L) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int dk \; e^{ikx} \left[1 - e^{ikL}\right] \tilde{f}(k) = 0$$

Koeff-Vergl.: $\left[1 - e^{ikL}\right] \tilde{f} = 0$

$$\tilde{f}(k) = \sum_n 2\pi c_n \, \delta\!\left(k - n\tfrac{2\pi}{L}\right)$$

$$f(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2\pi}\int dk \; e^{ikx} \sum_n 2\pi c_n \, \delta\!\left(k - n\tfrac{2\pi}{L}\right)$$

$$= \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Maxwell-Glen. im Unterricht

((Erinnerung: Intro Kap. 8, Skript S. 84: $\vec\nabla\cdot\vec E = \varrho$, $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec j + \dot{\vec E}$))

setze $\vec E, \varrho, \vec B, \vec j$ 4D-entwickelt ein

benutze $\left.\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\\ \vec\nabla\times\\ \partial_t\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\, \tilde{\vec E} = \left.\begin{matrix}i\vec k\cdot\\ i\vec k\times\\ -i\omega\end{matrix}\right\} e^{\cdots}\, \tilde{\vec E}$

also $\vec\nabla \to i\vec k$, $\partial_t \to -i\omega$

Koeff-Vergl. gibt also

$$\boxed{\begin{array}{ll} i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\varrho , & i\vec k\cdot\tilde{\vec B} = 0 \\ i\vec k\times\tilde{\vec E} = i\omega\tilde{\vec B} , & i\vec k\times\tilde{\vec B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\tilde{\vec j} - \frac{i\omega}{c^2}\tilde{\vec E} \end{array}}$$

⇒ $\widetilde{\text{Max}}$ ist nur noch System von Vektorglen.,
leicht auflösbar nach $\tilde{\vec E}$, $\tilde{\vec B}$ (selber machen ? Trick: z.B. $i\vec k\times$(Glg.))

⇒ Aufstieg zur kausalen Lösung (selber ?!)
füge "infinit. Leitfähigkeit (Reibung!) des $\mathbb{R}^3$" dazu,
via $\tilde{\vec j} \to \tilde{\vec j} + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\tilde{\vec E}$, $\vec j \to \vec j + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\vec E$