$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, in \tfrac{2\pi}{L}}_{\text{hat diese Koeff'n}} e^{in \frac{2\pi}{L} x}$$

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, e^{-in\frac{2\pi}{L}a}}_{\text{hat diese Koeff'}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mulbz: $f(x) = \delta_{per.}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gilt $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \, \delta(x)\, e^{\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

Bem: Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen.

(s. Ü88)

Anwendungen

1) Diffusion (vgl. Ü87) mit period. Start-Temp.

$$\dot T = D\Delta T, \quad T(x,t) = e^{tD\partial_x^2} T(x,0) = e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_n c_n e^{-tDn^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Oszi.:

$$(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2)\,x(t) = 6(t) = 6(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\;)}_{} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n 6_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\hookrightarrow -\left(n\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma\, in\tfrac{2\pi}{T} + \omega_0^2 =: [\;]_n$$

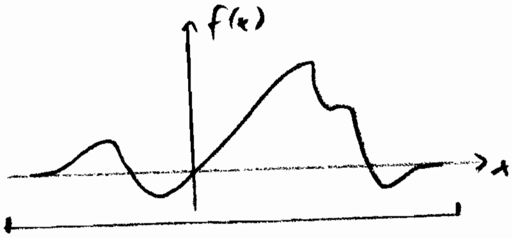
Koeff-Vergl.: $c_n[\;]_n = 6_n \Rightarrow c_n = 6_n / [\;]_n$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation (s. § 10.2)

10.2 Fourier-Transformation

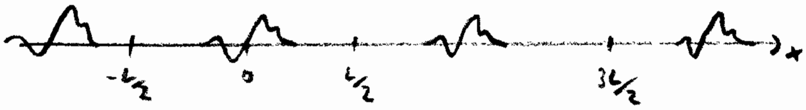
Motiv.: Geräusch statt Ton

"Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet / zurückverfolgt

Kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L \to \infty$ studieren.



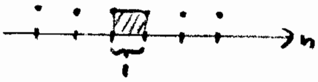
$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_n (L c_n)\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$\text{mit} \quad L c_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_n \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

beide immer schwächer von n abh.

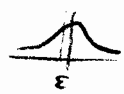
suche asympt. führenden f-Term bzgl. $L \to \infty$



$$\sum_n \ldots = \sum_n 1 \cdot \ldots \to \int dn \ldots$$

$$\to \frac{1}{L} \int dn\, \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

((



$$O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon\, g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$$

$$= \varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x) \qquad \| \cdot \tfrac{1}{\varepsilon}$$

$$O\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = \underline{\int dx}\, g(\varepsilon x) = \underline{\sum_n}\, g(\varepsilon n) + O(1)$$

))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi} dk$ gibt nun

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k) \\ \text{mit} \quad \tilde{f}(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

- $\tilde{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier ~ QFT)

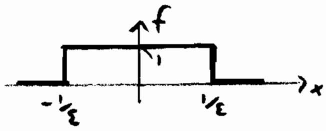
((Nachweis direkt: $f_{\mathcal{F}}(x)$ bilden, $f_{\mathcal{F}} = f$ zeigen,

$$f_{\mathcal{F}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right]$$

$$= \int dx'\, \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{=\delta(x-x')} f(x') = f(x)\,,\quad \text{qed.}$$

((s. Kap. 6, Skript S. 74))))

<u>Bsp</u> <u>"Kasten"</u> $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$



$$\tilde{f}(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$$

oder $\tilde{f} = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, \left(\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_x \sin(kx)\right) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow\; f = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$ hat $\tilde{f} = 2\pi\, \frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$))

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(x) = 1 & \text{hat} & \tilde{f}(k) = 2\pi\,\delta(k) \\ \text{und}\quad f(x) = \delta(x) & \text{hat} & \tilde{f}(k) = 1 \end{array}}$$

<u>Bem.</u>
- im physikalisch wohlverstandenen Sinne sind Konstante und δ's $\mathcal{F}$-transformierbar
- f eng (große ε), $\tilde{f}$ breit
  f breit, $\tilde{f}$ eng
- bei kleinen (großen) x und f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde{f}(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

<u>Bsp</u> <u>Gauß</u> $f(x) = A\, e^{-\alpha x^2}$

$$\tilde{f}(k) = A\int dx\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\to \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}} e^{-\alpha x^2}$$

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}\, k^{2n}\, \underbrace{(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{=\alpha^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}}_{= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\,\frac{1}{2^n}\,\alpha^{-\frac{1}{2}-n}}$$

((Kap. 6, S. 67))

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

$$\tilde{f}(k) \overset{!}{=} A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = \underline{A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-k^2/4\alpha}}$$

Bem.:
- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ breit
- $FT\{\text{Gauß}\} = \text{Gauß}$

  eine Forminvarianz unter F.T.!

  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}k\right)}$

  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

allg. Eigenschaften

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(-k) = \pm\tilde{f}(k) \Rightarrow \begin{cases} \cos - \text{Entwicklung} \\ \sin - \text{Entwicklung} \end{cases}$
- $$\int dx\, |f|^2 \overset{!}{=} \underbrace{\int dx \frac{1}{2\pi}}\int dk\, \underbrace{e^{ikx}}\tilde{f}(k)\,\frac{1}{2\pi}\int dq\, \underbrace{e^{-iqx}}\tilde{f}^*(q)$$
  $$\delta(k-q)$$
  $$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, |\tilde{f}(k)|^2$$ "Parseval's Theorem"

- Tabellen. $f(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$

  $=: \quad g(x) \quad + \quad u(x)$

$$\tilde{f}(k) \overset{!}{=} \int dx\, e^{-ikx}\left(g(x)+u(x)\right)$$
$$= \int dx\, \cos(kx)\, g(x) - i\int dx\, \sin(kx)\, u(x)$$

Räumliche FT

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\,\underbrace{\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(k_1,y,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\,\underbrace{\tilde{\tilde{f}}(k_1,k_2,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\,\tilde{f}(k_1,k_2,k_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\tilde{f}(\vec{k}) \\ &\text{mit } \tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, f(\vec{r}) \end{aligned}}$$