Klausur zu EMTP II Uni Bielefeld 16.01.2009

[Beginn 10:30, Abgabe 12:30 ; 30 Punkte, bei $\geq$ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: Aufwärmen (1+1+1=3 Punkte)
(a) $ze^z = \partial_z[\ ?\ ]$ (b) $\int_0^{2\pi} dx\ \sin(x-\pi)\ \cos(x-\pi) = ?$ (c) $\int_0^{\pi} dx\, |x-1|\, \theta(2-x) = ?$

Aufgabe 2: Euler (1 Punkt)
Formen Sie $\sin^2(x)$ per Euler-Formel in eine Linearkombination trigonometrischer Funktionen um.

Aufgabe 3: ein gewöhnliches Integral (3 Punkte)
Berechnen Sie $\int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx\ \tan(x)$. Mit simpler Geometrie vereinfacht sich Ihr Ergebnis [keine Trig's].

Aufgabe 4: Nabla (0.5+0.5+1=2 Punkte)
(a) $\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\,|\vec{r}\,| = ?$ (b) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}\,|\vec{r}\,| = ?$ (c) Berechnen Sie $(\vec{r}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{r}$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 5: Diffusion (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung $T(x,t)$ der 1D-Diffusionsgleichung $(\partial_t - D\Delta)T(x,t) = 0$ zur Anfangs-Temperaturverteilung $T(x,0) = T_0(\cos(2kx)+1)$, wobei $\{D, T_0, k\}$ Konstanten sind. Wo auf der x-Achse ist es bei $t\to\infty$ am wärmsten?

Aufgabe 6: Greens (3+1=4 Punkte)
(a) Wie lautet die zum Operator $L = f_1(t)\partial_t + f_2(t)$ gehörende Greensche Funktion $G(t,a)$?
[Dgl lösen z.B. per PQ-Formel und VdK.]
(b) Welche Greensfunktion erhalten Sie daraus für $f_1(t) = t,\ f_2(t) = -c$, wobei c konstant ist?

Aufgabe 7: Dgl lösen per Greens (2+1=3 Punkte)
$G(x) = x\,e^{-\beta x}\theta(x)$ löst die Gleichung $LG(x) = \delta(x)$, wobei $L = (\partial_x + \beta)^2$ ist. [$\beta > 0$ sei konstant.]
(a) Welche *spezielle* Lösung $y_{\mathrm{sp}}(x)$ der Differentialgleichung $Ly(x) = f(x)$ liefert obiges G?
(b) Für $f(x) = x$ ist also $y_{\mathrm{sp}}(x) = ?$

Aufgabe 8: Strömung mit Symmetrie (2 Punkte)
Welches Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}\,)$ erfüllt $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \alpha\,\delta(\rho - R)\,\vec{e}_\varphi$, wobei $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ist und $\{\alpha, R\}$ zwei Konstanten sind? [Hinweis: Symmetrie der rechten Seite der Glg $\to$ Ansatz für $\vec{v}(\vec{r}\,)$ $\to$ Lösung.]

Aufgabe 9: Oberflächenintegral (4 Punkte)
Im ganzen Raum herrsche die Stromdichte $\vec{j} = j_0(r^4\vec{e}_z - z^3\vec{r}\,)$. Welcher Strom I_1 fließt durch die Mantelfläche eines Zylinders um die z-Achse (Höhe H, Radius R), dessen Grundplatte senkrecht auf der x-y-Ebene steht? Welcher Strom I_2 fließt durch den Zylinderdeckel (bei $z{=}H$)?

Aufgabe 10: nichtlineare Differentialgleichung (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Gleichung $\boxed{y'' = (2-x)(y')^2}$ mit Anfangsbedingungen $y'(0) = \frac{1}{2}$ und $y(0) = 1$. [Besonderheit? usw...]

Aufgabe 11: Fourier (3 Punkte)
Berechnen Sie die (3D) Fouriertransformierte $\tilde{f}(\vec{k}\,)$ der Funktion $f(\vec{r}\,) = \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{e^{-\gamma r}}{r}$, wobei $r = |\vec{r}\,|$ ist und $R_1 < R_2$ und γ positive Konstanten sind. Ist Ihr Ergebnis reell oder komplex?

Viel Erfolg!