Klausur zu EMTP II	Uni Bielefeld	01.10.2008

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 31 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: (1 Punkt)
Welche Form haben die Äquipotentiallinien des 2D–Potentials $V(\vec{r}\,) = \arctan(e^{\cos(x^2-a^2+4y^2)})$?

Aufgabe 2: zum Warmrechnen (1+1+1=3 Punkte)
(a) $x\,\cos(x) = \partial_x\ [\ ?\ ]$ (b) $\int_0^2 dx\ (x - |x-1|) = ?$ (c) $\int_0^4 dx\ \sinh\left(3\arctan(x-2)\right) = ?$

Aufgabe 3: Kurvenintegral (3 Punkte)
Ein Reifen (Radius R) rollt auf einer Strasse (x-Achse). Welchen Weg L legt ein Punkt der Reifenoberfläche zurück, während er ab Strassenkontakt die maximale Höhe $2R$ erreicht?
[Hinweis: beim Lösen des 1D Integrals könnte die trigonometrische Identität $1-\cos(2a) = 2\sin^2(a)$ helfen.]

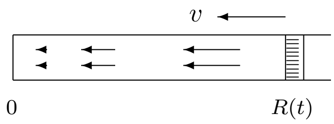
Aufgabe 4: Gradient (0.5+1.5=2 Punkte)
(a) $\vec{\nabla}\,y = ?$ (b) Per Nabla in Kugelkoord.: $\vec{\nabla}\,r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) = ?$ Ergebnis kartesisch angeben.

Aufgabe 5: geladene Platte (3 Punkte)
Die yz–Ebene sei mit Ladung Q pro Fläche F homogen geladen. Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,) = ?$
Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}\,)$ aus $\operatorname{div}\vec{E} = \rho$. [per Ansatz; Aufleiten; Konstante bestimmen.]

Aufgabe 6: Operator-Reihen (0.5+1+1.5=3 Punkte)
(a) $e^{-\alpha\,x^2\partial_x^2}\,x^3 = ?$ (b) $e^{\vec{r}\,\vec{\nabla}}\,r^2 = ?$ (c) $\frac{1}{2+\partial_x}\,\cosh(x) = ?$

Aufgabe 7: Vektorpotential (4 Punkte)
Ist das Feld $\vec{B} = 2\,r^2\,\vec{e}_3 - z\,\vec{r}$ quellenfrei? Ob es etwa Eigenfunktion des Operators $\vec{r}\cdot\vec{\nabla}$ ist? Welches Vektorpotential $\vec{A}$ hat es folglich gemäß $\vec{A} = -\vec{r}\times\dfrac{1}{2+\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}\,\vec{B}$? Erhält man nun per $\vec{\nabla}\times$ wieder das angegebene $\vec{B}$ zurück? [bac-cab; Kettenregel!]

Aufgabe 8: Conti (3 Punkte)



Ein Kolben (Querschnitt F, $x_{\text{Kolben}}(0) = R_0$, Geschwindigkeit v) komprimiert die im Rohr eingeschlossene Luft (N Teilchen). Die Teilchendichte $n(t)$ bleibe dabei ortsunabhängig. Wie groß ist die Teilchenstromdichte $\vec{\jmath}\,(x,t) = ?$

Aufgabe 9: Greensfunktion (3 Punkte)
Der lineare Operator $L = \partial_t + 3t^2$ ist nicht translationsinvariant. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t,a)$ hat er? [Hinweis: geht z.B. per VdK, oder per PQ-Formel.]

Aufgabe 10: Fourier–Reihe (3 Punkte)
Sei $T(x,0) = \beta\,\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ im Intervall $(0,L)$, L–periodisch auf dem Rest der x–Achse. Welche Fourier–Koeffizienten hat diese Start–Temperatur? Wie sieht ihre Zukunft $T(x,t)$ gemäß der Diffusionsgleichung $T(x,t) = e^{t\,D\,\partial_x^2}\,T(x,0)$ aus? Was ist der führende Term von $T(\frac{L}{2}, t\to 0)$?
[Hinweis: für winzige t ist $\sum_n \to \int dn$ erlaubt. Danach könnte $\int dn\, e^{-n^2} = \sqrt{\pi}$ nützlich sein.]

Aufgabe 11: Fourier–Trafo (3 Punkte)
Berechnen Sie die (3D) Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(\vec{k}\,)$ der Funktion $f(\vec{r}\,) = f_0\,\frac{a}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$.

Viel Erfolg!