EMTP II – Klausur 21.7.08 — Lösung

① "Höhe"·Umfang aufsummieren": $\int_0^R d\rho \cdot 2\pi\rho = \pi R^2$

② (a) $\vec\nabla\times\vec r = (\partial_y z - \partial_z y, \dots, \dots) = \vec 0$, oder: , nichts dreht sich $\Rightarrow \vec 0$

(b) $\vec\nabla\times(xf, yf, zf) = (-yf', xf', 0)$

③ $x_{sp}(t) = \int dt'\, k(t')\, G(t'-t)$

④ (a) $y' + P(x)\,y = Q(x)$ mit $P = \frac{2}{x}$, $Q = \frac{f(x)}{x}$; $\int_{x_0}^x dx'\, P(x') = \ln\frac{x^2}{x_0^2}$;

$\Rightarrow y_{allg}(x) = \frac{1}{x^2}\left(C + \int_{x_1}^x dx'\, x' f(x')\right)$

(b) $y = \frac{u}{x^2}$, $x\left(\frac{u'}{x^2} - \cancel{2\frac{u}{x^3}}\right) + \cancel{2\frac{u}{x^2}} = f$, $u' = xf$, $u = C + \int_{x_0}^x dx'\, x' f(x')$, s.o. ✓

⑤ $\alpha = \frac{rS_s' \cdot rC'}{r^2 S'^2 c^2 + r^2 S'^2 s^2} = \frac{sC'}{S'}$; $\alpha S' = sC'$ kommt in $\vec e_\vartheta = (C'c, C's, -S')$ vor.

⑥ (a) $\vec B = g(\rho)\,\rho\,\vec e_\varphi = g(\rho)\,(-y, x, 0)$; $\vec\nabla\times\vec B = (0, 0, (xg)'^x + (yg)'^y) = \vec e_3(\rho g' + 2g)$

$\overset{!}{=} f\,\vec e_3 \Rightarrow \underline{\rho g' + 2g = f}$

(b) $\int_S d\vec f\cdot(\vec\nabla\times\vec B) = \int_S d\vec f\cdot\vec j$, Stokes: $lhs = \oint_{\partial S} d\vec r\cdot\vec B$

wähle $S \equiv$ Kreisscheibe (Radius ρ) in xy-Ebene

$\Rightarrow d\vec f \parallel \vec j$, $d\vec r \parallel \vec B \Rightarrow 2\pi\rho\, B(\rho) = \int_{(\rho)} df\, f(\rho) = 2\pi\int_0^\rho d\rho'\,\rho' f(\rho')$

⑦ $\vec\nabla\cdot\vec E = 0 \Rightarrow \underline{\rho = 0}$; $\vec\nabla\times\vec E = \alpha t\,\vec e_1 \overset{!}{=} -\dot{\vec B} \Rightarrow \underline{\vec B = -\frac12\alpha t^2\,\vec e_1}$ $(+\vec b(\vec r))$ wähle $=\vec 0$;

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ ✓ $(\vec\nabla\cdot\vec b \overset{!}{=} 0)$; $\vec\nabla\times\vec B = \vec 0\ (+\vec\nabla\times\vec b) \overset{!}{=} \vec j - \alpha z\,\vec e_2 \Rightarrow \underline{\vec j = \alpha z\,\vec e_2}\ (+\vec\nabla\times\vec b)$

⑧ (a) $1 \overset{!}{=} \alpha\int dx\,\cosh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Theta\left(1-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right) = \alpha\varepsilon\int_{-1}^{1} dx\,\left(\cosh(x) = \partial_x\sinh(x)\right) = 2\alpha\varepsilon\sinh(1) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\varepsilon\sinh(1)}$

(b) $1 \overset{!}{=} \beta\int d^3r\,\frac{e^{-r^2/\varepsilon^2}}{r^2} = \beta\varepsilon\, 4\pi\int_0^\infty dr\, e^{-r^2} = \beta\varepsilon\, 4\pi\frac{\sqrt\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3}\,\varepsilon}$

⑨ (a) einsetzen, $-\omega^2 g c = \alpha^2 c\,\frac1r\partial_r^2\, r g \Leftrightarrow -\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2(rg) = (rg)'' \Rightarrow g(r) = \frac{A}{r}\cos\left(\frac{\omega}{\alpha}r\right) + \frac{B}{r}\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}r\right)$

(b) einsetzen, $\ddot f g = \alpha^2 f\,\frac1r\partial_r^2\, r g \Leftrightarrow \frac{\ddot f}{f} = \alpha^2\frac{(rg)''}{(rg)}$; links: Funktion (t), rechts: Funktion (r)

$\Rightarrow$ Gleichung nur erfüllbar für links = rechts = const. $\Rightarrow$ Struktur wie in (a)

⑩ (a) $\tilde f(k) = \int dx\, e^{-ikx}\,\Theta(-x)\,e^{\varepsilon x} = \int_{-\infty}^0 dx\, e^{(\varepsilon-ik)x} = \frac{1}{\varepsilon-ik}(1-0)$

(b) $T(x,t) = e^{tD\partial_x^2}\int\frac{dk}{2\pi}\,e^{ikx}\,\tilde T(k,0) = \frac{T_0}{2\pi}\int dk\, e^{-tDk^2}e^{ikx}\frac{1}{\varepsilon-ik}$

$\Rightarrow T'(x,t) = \frac{T_0}{2\pi}\int dk\, e^{ikx-tDk^2}\frac{ik}{\varepsilon-ik}$, $T'(0,t) \overset{\varepsilon\to0}{=} -\frac{T_0}{2\pi}\int dk\, e^{-tDk^2} = -\frac{T_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{tD}}\underbrace{\int dk\, e^{-k^2}}_{=\sqrt\pi}$

$= -\frac{T_0}{\sqrt{4\pi tD}}$

Transformieren:

⑪ $\phi(\vec r) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec k\vec r}\,\tilde\phi(\vec k)$, $\delta(\vec r) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec k\vec r}\cdot 1 \Rightarrow \underline{-(i\vec k)^2\,\tilde\phi(\vec k) = \alpha\cdot 1 - \beta^2\,\tilde\phi(\vec k)}$

Lösen: $\tilde\phi(\vec k) = \frac{\alpha}{k^2+\beta^2}$; Rücktrafo: $\phi(\vec r) = \alpha\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec k\vec r}\,\frac{1}{k^2+\beta^2}$, $u \equiv \cos(\vartheta)$

$= \frac{\alpha}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, k^2\, 2\pi\int_{-1}^{1} du\, e^{ikru}\,\frac{1}{k^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\frac{k\sin(k)}{k^2+(\beta r)^2}$

Ergebnisse: ab 25. Juli; online + Aushang (E6)

Einsicht im Prüfungsamt (D3-155)