Klausur zu EMTP II   Uni Bielefeld   21.07.2008

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 33 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: Kreisfläche (1 Punkt)
Wie folgt πR^2 aus Addition infinitesimaler Flächen zwischen ρ-Kreis und $(\rho + d\rho)$-Kreis?

Aufgabe 2: Rotation (1+1=2 Punkte)
(a) $\nabla \times \vec{r} = ?$ (b) $\nabla \times (f(z)\,\vec{r}\,) = ?$

Aufgabe 3: Strategiefrage (2 Punkte)
Wie ergäbe sich die spezielle Lösung $x_{\rm sp}(t)$ der Dgl $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = k(t)$ aus Kenntnis der Lösung $G(t)$ von $(\partial_t^2 + \omega^2)G(t) = \delta(t)$?

Aufgabe 4: Differentialgleichung (2+2=4 Punkte)
Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y_{\rm allg}(x)$ der Gleichung $\boxed{x\,y'(x) + 2\,y(x) = f(x)}$:
(a) per PQ-Formel. (b) per neuer Funktion $y(x) = u(x)/x^2$. [Ergebnis enthält je ein Integral.]

Aufgabe 5: Kugelkoordinaten (2 Punkte)
Drücken Sie die kartesische Bildung $\alpha \equiv y\,z/(x^2 + y^2)$ durch Kugelwinkel [also $C \equiv \cos(\vartheta)$, $S \equiv \sin(\vartheta)$, $c \equiv \cos(\varphi)$ und $s \equiv \sin(\varphi)$] aus. Wo in $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ kommt die Komponente $\alpha\, S$ vor?

Aufgabe 6: Dicker Draht, Integralsatz von Stokes (2+3=5 Punkte)
Es fließe Ladung nach oben: $\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,) = f(\rho)\vec{e}_3$ [ρ ist Zylinderkoordinate, f eine nicht spezifizierte Funktion.].
Den Betrag des Magnetfeldes $\vec{B}(\vec{r}\,) = B(\rho)\vec{e}_\varphi$ kann man aus $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{\jmath}$ erhalten:
(a) per Dgl für $g(\rho) \equiv B(\rho)/\rho$. Wie lautet diese? [nicht lösen. Schreiben Sie zuerst $\vec{e}_\varphi$ kartesisch auf.]
(b) per Integralsatz: $\int_S d\vec{f} \cdot [\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{\jmath}\,]$ bilden, Fläche S samt Randkurve $\mathcal{C}$ geeignet wählen.

Aufgabe 7: Maxwell (3 Punkte)
Leiten Sie aus den vier Gleichungen $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho\,;\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,;\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B}\,;\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{\jmath} + \partial_t \vec{E}}$
her, welche Felder $\rho(\vec{r},t) = ?$, $\vec{B}(\vec{r},t) = ?$ und $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = ?$ zu $\vec{E}(\vec{r},t) \equiv \alpha(0, -z\,t, 0)$ gehören.
[Hinweis: Es reicht, für $\vec{B}$ und $\vec{\jmath}$ die einfachsten Lösungen anzugeben, d.h. Integrationskonstanten $= 0$ zu setzen.]

Aufgabe 8: Delta-Darstellungen (1+1=2 Punkte)
(a) 1D: $\delta(x) = \alpha \cosh(x/\varepsilon)\,\theta(1 - x^2/\varepsilon^2)$, $\alpha = ?$ (b) 3D: $\delta(\vec{r}\,) = \frac{\beta}{r^2}\, e^{-r^2/\varepsilon^2}$, $\beta = ?$
[Wie immer ist $\varepsilon \to 0^+$ ein infinitesimaler Parameter, und $r = |\vec{r}\,|$. Kennen $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ aus Vorlesung.]

Aufgabe 9: Radial-Laplace (2+2=4 Punkte)
(a) Lösen Sie Wellengleichung $\boxed{\partial_t^2 n(\vec{r},t) = \alpha^2 \Delta\, n(\vec{r},t)}$ mit dem kugelsymmetrischen Separationsansatz $n(\vec{r},t) = n_0 + g(r)\cos(\omega t)$, mit $r = |\vec{r}\,|$ und kontantem n_0. $g(r) = ?$
(b) Warum ergibt sich sogar mit Ansatz $n(\vec{r},t) = n_0 + g(r) f(t)$ eine ähnliche Lösung?

Aufgabe 10: Fourier in 1D (1+3=4 Punkte)
(a) Sei $f(x) = \theta(-x)e^{\varepsilon x}$ mit $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \tilde{f}(k) = ?$
(b) Sei $T(x,t) = e^{tD\partial_x^2}\, T(x,0)$ (D konstant) eine Lösung der Diffusionsgleichung mit Anfangsbedingung $T(x,0) = T_0 f(x)$. Berechnen Sie $\partial_x T(x,t)$ and der Stelle $x = 0$ im Limes $\varepsilon \to 0$.
[Hinweis: vielleicht ist $\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-k^2} = \sqrt{\pi}$ nützlich.]

Aufgabe 11: Fourier in 3D (4 Punkte)
Sie können die ϕ–Gleichung $\boxed{-\Delta\phi(\vec{r}\,) = \alpha\delta(\vec{r}\,) - \beta^2\phi(\vec{r}\,)}$ (α, β konstant) nicht lösen. Deshalb transformieren Sie sie in den Fourier-Raum, finden also eine Gleichung für $\tilde{\phi}(\vec{k}\,)$. Die $\tilde{\phi}$–Gleichung läßt sich einfach lösen: $\tilde{\phi} = ?$. Um schließlich $\phi(\vec{r}\,)$ anzugeben, brauchen Sie "nur noch" ein 3D Integral zu lösen. Das Radialintegral dürfen Sie am Ende stehenlassen: $\phi(\vec{r}\,) = \int dk\, ..?..$

Viel Erfolg!