

Definierende Eigenschaft der **Delta-Funktion**: $\int dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$

δ -Darstellungen: $\delta(x) = \frac{1}{2\varepsilon}$ für $-\varepsilon < x < \varepsilon$ und 0 sonst

$$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1 + e^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{e^{x/\varepsilon} + 1}$$

$$\delta(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \delta(x) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk e^{ikx}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx - \varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} (e^{-\varepsilon|k|})$$

allgemein: $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ mit $F := \int dx g(x)$

Stufenfunktion θ : $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x (\theta(x)\text{-Darst.}) = \delta(x)\text{-Darst.}$

$$\theta(x) = 1 - \theta(-x), \quad \text{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = 2\theta(x) - 1$$

δ -Formeln: $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x - a) + \delta(x + a))$

allgemein: $\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$, x_n sind die Nullstellen von f

$$\frac{1}{i} \int_0^\infty dk e^{ikx - \varepsilon k} = \frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x), \quad \mathcal{P} \text{ für } \textit{Principal value} \text{ (Hauptwert)}$$

$$\int dx f(x) \delta'(x) = -f'(0), \quad -x \delta'(x) = \delta(x), \quad \int dx \delta(x - a) \delta(x - b) = \delta(a - b)$$

δ -Physik:

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$, $\vec{j}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{r}}_0(t) q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$

Geladener Kreisring: $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R} \delta(\varrho - R) \delta(z)$

Geladene Metallkugel: $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x \cdot$) hat gemäß $x \delta(x - a) = a \delta(x - a)$ die kontinuierlich mit a nummerierten Eigenfunktionen $\delta(x - a)$.

Sei L ein (auf x -Abh. wirkender) linearer Operator, und $Ly(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$.

Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle“, d.h. das Hilfsproblem $LG(x, a) = \delta(x - a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion“ $G(x, a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\int da f(a) LG(x, a) \stackrel{||}{=} \int da f(a) \delta(x - a) \\ L \int da f(a) G(x, a) \stackrel{||}{=} f(x) \quad \leadsto \quad y(x) = \int da f(a) G(x, a) .$$