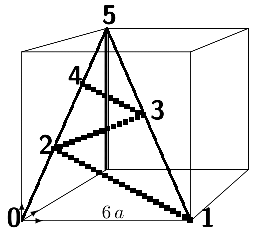
Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 01** 15.10.2007

[Abgabe 22.10 in H6 *vor* der Vorlesung]

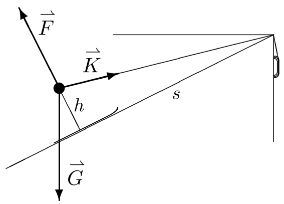
Aufgabe 1: Girlande (3 Punkte)



Ein senkrecht aufgestellter Mast wird von Stahlseilen gehalten. Denkt man ihn sich als Kante eines Würfels, so führen zwei der Seile von der Spitze bei $\vec{r}_5 = (\,0\,,\,6a\,,\,6a\,)$ zu den skizzierten Ecken **0** und **1**. Eine Girlande führt geradlinig von **1** nach **2**, von dort nach **3** und sodann nach **4**. Die Punkte 2, 3, 4 befinden sich auf Höhe $2a$ bzw. $3a$ bzw. $4a$ über dem Boden. Welche Höhe h des Mastes ergibt sich aus der Gesamtlänge ℓ der Girlande? Zu speziell $\ell = 20\,$m folgt $h = ?$

[Systematik: Ortsvektoren $\vec{r}_1$ bis $\vec{r}_4$ in Komponenten–Darstellung aufschreiben, damit die Verschiebungsvektoren $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_{23}$, $\vec{r}_{34}$ bilden usw.]

Aufgabe 2: Skilift (4+1+1=6 Punkte)



Das Seil wird über eine punktförmige Rolle am Ursprung gezogen. Der Einheitsvektor $\vec{e} = (-2,-1)/\sqrt{5}$ liegt auf der Piste, und $\vec{n} = (-1,2)/\sqrt{5}$ (der *Normalenvektor*) steht senkrecht auf ihr. 2D Problem. Der Skifahrer (Ort $\vec{r}$, $s =$ Abstand seiner Füße zum Ursprung) wurde zu einem Punkt idealisiert (Gewicht G bekannt), welcher stets den Abstand h zur Piste einhält. Es interessieren die Kräfte $\vec{K}$ und $\vec{F}$ zu gegebenem s.

(a) Konstruieren Sie zuerst den dritten Einheitsvektor $\vec{e}_K$ in Seilzugrichtung. Aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte (den Kraftbeträgen K und F) ergeben sich schließlich $\vec{K}$ und $\vec{F}$ je in Komponentendarstellung. [Hinweis: Es herrscht Kräftegleichgewicht $\vec{F} + \vec{G} + \vec{K} = \vec{0}$.]

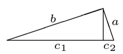
(b) Bei $s = s_b = ?$ wird das Seil horizontal, und dann ist $\vec{K}_b = ?$ und $\vec{F}_b = ?$

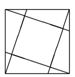
(c) Bei $K = \sqrt{10}\,G$ reißt das Seil. Nur höchstend $s_c = ?$ wird also erreicht. Welche Kraft drückt dem Skifahrer kurz zuvor auf die Fußsohlen?

Aufgabe 3: Satz von Pythagoras - drei Beweise (1+1+1=3 Punkte)

(a) Vier Ausfertigungen eines rechtwinkligen Dreiecks ($a < b < c$) werden in einen Sandkasten $c \cdot c$ gelegt (Skizze!). Nun ist eine halbe Zeile Rechnung erforderlich, um $c^2 = a^2 + b^2$ zu zeigen.

(b) Ein Lot von Ecke auf Hypothenuse c teilt diese in $c = c_1 + c_2$. Da die Teildreiecke „ähnlich" zum ursprünglichen sind (d.h. gleiche Verhältnisse einander entsprechender Strecken haben), kann man c_1 und c_2 durch a, b, c ausdrücken, und so Pythagoras beweisen.



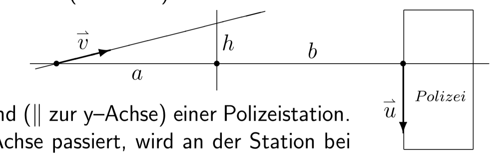
(c)  $b{\cdot}b$–Sandkasten mit vierfach eingemaltem Dreieck. Können Sie einige der skizzierten Puzzleteile so parallelverschieben, daß $c^2 - a^2$ zu sehen ist?

- Trigonometrie ist (noch) unbekannt, unrentabel und darum auf diesem Blatt verboten.
- Ihre Bearbeitung dieser 3 Aufgaben dürfte bequem auf zwei (unlinierten) DIN A4 Blättern Platz haben.
- Bitte heften Sie – falls Sie noch nicht ueber das eKVV angemeldet sind – einen Zettel mit Name, Vorname, Matr-Nr. und Studienfach an, den wir abreißen und behalten dürfen.
- Auf der Bearbeitung selbst vermerken Sie bitte – auch künftig – oben rechts Ihren Namen, sowie das Kürzel Ihres Tutors (DR/RM/DB/MS/SL), bzw (V) bei Abholung in der Vorlesung.
- Versuchen Sie, a l l e Aufgaben zu lösen, und zwar a l l e i n .
- Klausur am Montag, dem 11.02.2008.

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 02** 22.10.2007

[Abgabe 29.10 *vor* der Vorlesung]

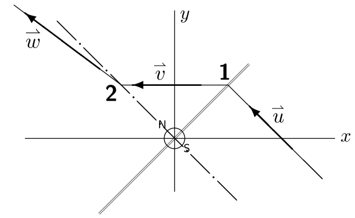
Aufgabe 4: Nächtliche Geschwindigkeitskontrolle (3 Punkte)



Eine gerade Landstraße verläuft über die Punkte $(-a\,,\,0)$ und $(\,0\,,\,h\,)$. Der Scheinwerfer eines Autos wirft den Schatten eines Telegrafenmastes (= Ursprung) auf die Wand (∥ zur y–Achse) einer Polizeistation. In dem Moment, in dem der Raser die x–Achse passiert, wird an der Station bei $(\,b\,,\,0\,)$ die Schattengeschwindigkeit u registriert. Erstellen Sie bitte eine Formel (u, a, b, h enthaltend) für die Geschwindigkeit v des Autos.

[Hinweise: Die Skizze ist eine Draufsicht; Hier ist die Lichtgeschwindigkeit $c \approx \infty$.]

Aufgabe 5: Zentralkraft und Drehimpuls (3+2=5 Punkte)



Das seltsame Zentralkraftfeld eines fernen Planeten (Mitte = Ursprung) ist fast überall Null. Nur nahe an der S–N–Achse stößt es stark ab, und in enger Umgebung der Äquatorebene zieht es an. Eine Raumsonde fliegt genau in der Ebene $z = 0$ ein, und zwar parallel zur S–N–Achse (links–diagonal) und mit Geschwindigkeit u. Sie wird bei $\vec{r}_1 = (1,1,0)a/\sqrt{2}$ an der Äquatorebene abgelenkt und bei $\vec{r}_2 = (-1,1,0)a/\sqrt{2}$ durch das polare Bündel in Richtung $\vec{e}_w = (-4,3,0)/5$ in den Raum geschleudert — mit welcher Geschwindigkeit w?

(a) Was bei Punkt 1 gilt, kann als Gleichheit zweier Skalarprodukte (mit welchem Einheitsvektor $\vec{e}$?) notiert werden. Weil $\vec{u} = (?,?)$ bekannt ist, folgt $\vec{v}$ und (nach gleichem Prinzip) dann w.

[Hinweis: Eine Zentralkraft wirkt in Richtung des Ursprungs, und läßt daher Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu dieser Richtung unverändert.]

(b) Jemand behauptet, $\vec{\ell} := \vec{r} \times \vec{v}$ sei eine interessante Bildung (und $\vec{L} = m\vec{\ell}$ heiße *Drehimpuls*). Wir rechnen diesen Vektor vier mal aus, und zwar bei 1 unmittelbar vor Eintritt in die Kraftfeld–Schicht, dort unmittelbar nach Austritt, bei 2 vor und bei 2 nach. Wir bilden also $\vec{\ell}_{1v}$, $\vec{\ell}_{1n}$, $\vec{\ell}_{2v}$ und $\vec{\ell}_{2n}$ – und staunen. (Es lag an der Zentralkraft, gilt für jede und heißt *Drehimpulserhaltung*.)

Aufgabe 6: Vier *quickies* (1+0.5+0.5+1=3 Punkte)

(a) Eine ferne Zivilisation legt einen Vektor $\vec{a}$ durch Angabe der Abstände u, v, w zu den Achsen (statt zu den Ebenen) fest. u ist die Länge des Lotes vom $\vec{a}$–Endpunkt zur x–Achse usw. Wie drückt sich der Betrag $a = |\vec{a}|$ durch u, v, w aus?

(b) Zeigen Sie: Sind die Beträge von Summe und Differenz zweier Vektoren gleich, dann sind die Vektoren senkrecht zueinander.

(c) Zeigen Sie: Sind Summe und Differenz zweier Vektoren senkrecht zueinander, dann haben die Vektoren denselben Betrag.

(d) Wird eine Komponente (Ihrer Wahl) der linken Seite von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b})$ ausführlich durch Komponenten ausgedrückt und (unabhängig davon) selbiges auch mit der rechten Seite getan, so ist die „bac–cab–Formel" *verifiziert*.

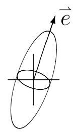
- Auf der Bearbeitung vermerken Sie bitte oben rechts Ihren Namen, sowie das Kürzel Ihres Tutors (DR/RM/DB/MS/SL), bzw (V) bei Abholung in der Vorlesung.

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 03** 29.10.2007

[Abgabe 5.11 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 7: Kreuzprodukt und Vektorgleichungen (2+1+[1]=3+[1] Punkte)

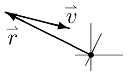
(a) Um ein Magnetfeld $\vec{B}$ zu messen, welches in einem Raumbereich um den Ursprung herrscht, wird dort ein geladenes Teilchen (Ladung q) mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ hindurchgeschossen und aus seiner Ablenkung die Kraft pro Ladung $\vec{K}/q =: \vec{k}$ ermittelt. [Der Zusammenhang ist $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{k}$.] Ein zweites solches Experiment, diesmal mit Geschwindigkeit $\vec{u}$, gab $\vec{g}$ für Kraft/q. Bekannt sind $\vec{v}$, $\vec{k}$, $\vec{u}$, $\vec{g}$, nur nicht $\vec{B} = ?$ [Ob hierbei die Bildung $\vec{k} \times \vec{g}$ etwas bedeutet?]
Natürlich spielt die Reihenfolge der beiden Experimente keine Rolle, also darf man im $\vec{B}$–Resultat $(\vec{v}, \vec{k}) \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{g})$ ersetzen. Weisen Sie die Gleichheit der beiden Resultate direkt nach.



(b) Welche Vektorgleichung legt ein Rotationsellipsoid mit Symmetrieachse $\vec{e}$ fest ? [Vorgehen: Kugel → Ellipsoid um z–Achse → vektorielle Form , fertig !]

[c] Zusatzpunkt: Auch ein schief im Raum hängender Kreis (Mitte ≠ Ursprung) hat seine (eine) Vektorgleichung. Welche?

Aufgabe 8: Ein Dreibein (VONS) $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ (3+2=5 Punkte)



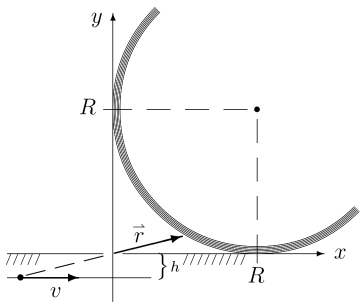
Ein Meteor nähert sich der Erde (= Ursprung). Den Punkt $\vec{r}$ hat er mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ passiert. Die Einschlaggefahr soll in einem System mit $\vec{f}_1 \sim \vec{v}$ und $\vec{f}_3 \perp \vec{r}, \vec{v}$ analysiert werden (wobei $\vec{v}, \vec{r}$ und $\vec{f}_3$ ein Rechtssystem bilden).

(a) Stellen Sie Formeln für die drei $\vec{f}_j$ bereit. Jetzt erst kommen die Daten herein: $\vec{r} = (-2, 0, 1)\, a$ und $\vec{v} = (7, 4, -4)\, v_0$. Daraufhin können Sie $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ in Komponentendarstellung angeben, zeilenweise in eine Matrix füllen und (zur Kontrolle) deren Determinante nach Sarrus–Regel berechnen. [Sie wissen natürlich schon vorher, was diese ergibt.]

(b) Welche Komponenten $(\vec{r}\vec{f}_1, \vec{r}\vec{f}_2, \vec{r}\vec{f}_3) =: \vec{r}\,'$ hat der Meteor im $\vec{f}$–System, und welche (analog definierte) Geschwindigkeit $\vec{v}\,'$? Wird nun, geradlinige Bewegung unterstellend, im $\vec{f}$–System die Flugbahn $\vec{r}\,'(t)$ in Parameterdarstellung notiert, so zeigt diese an, in welchem Mindestabstand (=?) der Meteor die Erde passiert.

Aufgabe 9: Ein Ufo über Bielefeld? (4 Punkte)

Bei Nacht fährt ein (punktförmiges) Auto mit Geschwindigkeit v durch den Ostwestfalentunnel (Höhe h, $\vec{r}_{\text{Auto}}(t) = ?$). Um $t = 0$ Uhr wird es die y–Achse passieren, welche vertikal durch ein Dachfenster (=Ursprung) verläuft. Ein dünner Strahl seines Fernlichts fällt durch das (punktförmige) Fenster auf eine walzenförmige (R) große dunkle Wolke, welche (je bei R) die Erde und die y–Achse berührt. 2D Problem. Alsbald häufen sich Anrufe bei der Polizei, es sei ein Ufo gesichtet worden. Am nächsten Tag wird in der „NW" sogar sein Ort angegeben, nämlich $\vec{r}(t) = ?$



[Hinweis 1: Die Skizze ist eine Seitenansicht.]
[Hinweis 2: Welches Wurzel–Vorzeichen ist sinnvoll? Ständig ist $t < 0$, also darf z.B. $\sqrt{-2hvt}$ vorkommen.]
[Hinweis 3: Als Test Ihres Resultats: bei $t = 0$ muß natürlich $\vec{r}(0) = (0, R)$ sein.]

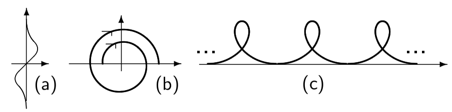
• **Bitte geben Sie oben rechts auf ihrer Bearbeitung an, wo Sie den korrigierten Zettel abholen (für Übungsgruppen das Tutor-Kürzel: DR, RM, DB, MS oder SL; für Vorlesung: V)**

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 04** 05.11.2007

[Abgabe 12.11 *vor* der Vorlesung]

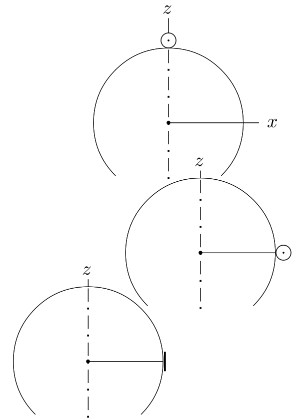
Aufgabe 10: Raumkurven (1+1+1=3 Punkte)

Notieren Sie möglichst einfache 2D Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$, so daß Bahnkurven der skizzierten Form entstehen. Bei (b) soll der Parameter $\omega t =: \tau$ von 0 bis 2π laufen, bei (a) und (c) von $-\infty$ bis $+\infty$.



[Hinweise: Dimension $[\vec{r}]$=Länge; Bei (c) kreist etwas auf einem Föderband. Dessen Geschwindigkeit v darf, damit sich Schleifen bilden, nicht zu groß sein: $v < ?$]

Aufgabe 11: Riesenräder. $\vec{r}(t) = ?$ (2.5+1+1.5=5 Punkte)



(a) Die Erde (Radius R) dreht sich mit Ω um die z–Achse (Ursprung=Erdmitte). Am Nordpol steht ein Riesenrad (Radius ϱ, Winkelgeschwindigkeit ω). $\vec{r}(t)$ sei der Ortsvektor der Gondel, welche zur Zeit $t = 0$ unten ist : $\vec{r}(0) = (0, 0, R)$.
Aus $\vec{r}(t)$ bilden wir auch $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ [dies aber nur zu Teil (a)] und prüfen, ob die Beträge $v(0)$ und $v(\pi/\omega)$ gleich sind.

(b) Wie bei (a), aber das Riesenrad steht am Äquator. $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$.

(c) Wie bei (b), aber das Rad liegt flach, ist also ein ebenerdiges Karussell. $\vec{r}(0) = (R, 0, -\varrho)$.

Tip: Behandeln Sie zu jeder dieser drei Situationen erst einmal eine Vorstufe (vs), in welcher die Erde ruht ($\Omega = 0$) : $\vec{r}_{\text{vs}}(t) = ?$ Und dann hilft es vielleicht, vom Polarstern aus auf das Geschehen herabzublicken, also dessen Projektion auf die xy–Ebene zu betrachten.
[Hinweis: Nützliche Abkürzungen sind $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$.]

Aufgabe 12: Ableiten = Differentialquotient bilden (1+1+2=4 Punkte)

(a) Bereits aufgrund gewisser Eigenschaften von $f(x)$ läßt sich $f'(x)$ ermitteln :
$f(\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, $f(x+y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + \sqrt{1+f^2(x)}\, f(y) \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = ?$
Wie $f(x)$ verläuft, werde nun grob qualitativ skizziert. (Die Funktion f kennen wir ansonsten *nicht*. Später einmal bekommt sie einen Namen.)

(b) $f(1+\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ $(0 < x, y)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = ?$ f–Skizze ?

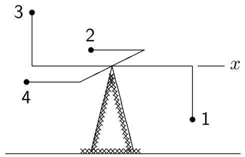
(c) Bei Übung 9) hatte sich der Ufo–Ort $\vec{r}(t) = \frac{R\,(h - vt - \sqrt{-2hvt}\,)}{h^2 + v^2 t^2}\,(\,-vt\,,\,h\,)$ ergeben.
Jetzt interessiert uns seine Geschwindigkeit $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ und zwar kurz bevor es bei $(0, R)$ entschwindet. Wie sich dort $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ verhalten wird, ist uns anschaulich klar — nämlich (in Worten) wie ? Bei der Berechnung von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ dürfen Sie nun (im rechten Moment Ihrer Wahl) allerlei Terme weglassen, welche bei $t \to -0$ (relativ zu einem additiven Term) beliebig klein werden. Nur ein Term bleibt je schließlich übrig. Sie haben den *asymptotisch führenden Term* von $\dot{x}$ bzw. von $\dot{y}$ präpariert.

• Bitte zögern Sie nicht, uns mit Ihren Fragen zu den Hausübungen zu löchern: DB (D6-150; 0521-106-5319), SL (E5-121; -6199), RM (D6-136; -5315), DR (E6-115; -6218), MS (D6-138; -5316), YS (E6-118; -6211).

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 05** 12.11.2007

[Abgabe 19.11 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 13: Ableitung, Winkelgeschwindigkeit (4+1=5 Punkte)

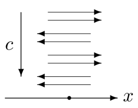


Die Lösung von Übung 11c gefällt den Schaustellern eines Schützenfestes. Sie setzen darin $\varrho = R$ und $\Omega = \omega$ und bauen das Karussell auf: $\vec{r}(t) = R\,(c - s^2, s + s\,c, -c)$, wobei $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$.

(a) Etwas skeptisch, ob das gut geht, bilden wir $\dot{\vec{r}} =: \vec{v}$ und $\ddot{\vec{r}} =: \vec{a}$. Deren Betragsquadrate v^2, a^2 lassen sich vereinfachen ($\sim$ zahl $\pm$ (trig + zahl)^2), so daß sich die Extrema $v^2_{\max}$ und $a^2_{\max}$ *ablesen* lassen. Wenn $R = \sqrt{10}\,m$ und $\omega = \sqrt{5}\,s^{-1}$, wie rasant ($v_{\max}$) wird es dann? Wieviele g sind auszuhalten ? An welcher der numerierten Stellen wird es so „bedrückend" ?
[Hinweise: Stets sofort s^2 durch $1 - c^2$ ersetzen. Als Zahlenwerte reichen $\sqrt{50} \approx 7$, $g \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$]

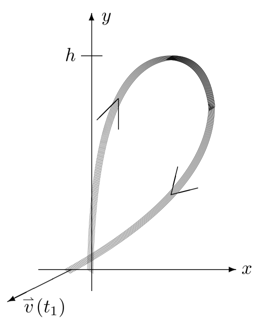
(b) Um die Formel $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ zu überprüfen (mit obigem $\vec{r}$), setzen wir $\vec{\omega}$ additiv zusammen aus $\vec{\omega}_1$ („Erd"–Drehung um z-Achse) und aus der Drehung $\vec{\omega}_2(t)$ um die sich zeitlich ändernde „Karussell"–Achse. Kommt das bei (a) erhaltene $\vec{v}(t)$ wieder heraus ?!

Aufgabe 14: Lichtwelle – 1D Newton mit $K(t)$ (3 Punkte)



Ein geladenes Teilchen (Masse m) gleitet zunächst reibungsfrei und kräftefrei auf der x–Achse mit $v_0 > 0$ vor sich hin und erreicht zur Zeit $t = 0$ den Ursprung. Ab jetzt aber wird es ständig von einer senkrecht einfallenden ebenen elektromagnetischen Welle getroffen, so daß es die Kraft $K(t) = -m\,k\,\sin(\omega t)$ erfährt. Wir vervollständigen den Eindeutigkeitsrahmen (ER) $\boxed{\ddot{x} = -\,k\,\sin(\omega t)\ ,\ \dot{x}(0) = \quad ,\ x(0) = \quad}$, erhalten mittels Ansatz die Lösung $x(t)$ des Problems und können nun sagen, welche Startgeschwindigkeit v_0 erforderlich war, damit das Teilchen eine *harmonische Schwingung* [Zeitabhängigkeit periodisch] ausführt.

Aufgabe 15: Fußball – 2D Newton mit $\vec{K}(t)$ (4 Punkte)



Ein Ball (m) startet bei $\vec{r}(0) = (0, 0)$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = (0, v_0)$. Er wird von starkem Seitenwind wechselnder Richtung erfaßt, so daß zusätzlich zur Erdanziehung (hier in negativer y–Richtung) auch noch die Kraft $\vec{F} = mg\,(1 - \lambda\,t, 0)$ auf ihn wirkt, wobei $\lambda = 3g/(2v_0)$ sei.

Schreiben Sie je einen ER für $x(t)$ und $y(t)$, und lösen diese.
Zu welcher Zeit t_0 erreicht der Ball welche größte Höhe h ?
Wann (t_1) und wo ($x(t_1)$) trifft er wieder auf der Erde auf?
Und welche Geschwindigkeit $\vec{v}(t_1)$ hat er dann?
Die nebenstehende 2-dimensionale Skizze ist qualitativ nicht ganz richtig. Können Sie sie korrigieren?

- Integrale sind uns (noch) unbekannt, hier unrentabel und darum zu diesem Blatt verboten.
  [Wie könnte es mit **Integralen** laufen ? Am Ende hätte man sie auszuwerten. *Wie* eigentlich, falls das überhaupt möglich ist, — mittels Ansatz ! Aha. Na dann doch lieber gleich. Sobald übrigens $\vec{K}$ auch von $\vec{r}$ abhängt, ist es ohnehin aus mit einem blinden „Integrale darüber werfen". Aber **Ansätze funktionieren weiterhin**.]
  [Wie kommt man auf einen **Ansatz**? Gedanken spielen lassen! Physikalische Motivation, z.B.: Kraft periodisch, also Lösung vielleicht auch, also sin und/oder cos in den Ansatz. Technische Motivation, z.B.: ein $A + Bt$ im $x(t)$ verschwindet nach zweimaligem Ableiten, also auch vorsichtshalber dazu. Etc.]

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 06** 19.11.2007

[Abgabe 26.11 *vor* der Vorlesung]

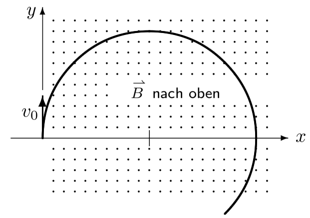
Aufgabe 16: Gebremster Zug (2+1=3 Punkte)

Ein Zug (m_0, Geschwindigkeit v_0) wird ab Zeit $t = 0$, zu welcher sein Kopf gerade den Ursprung passiert, mit konstanter Kraft $K_1 = -m_0\,k$ gebremst. Normalerweise würde er bei $t_0 = v_0/k$ zum stehen kommen (stimmt das?). Jemand will jedoch den Zug früher zum Halten bringen und wirft darum Gepäckstücke seitwärts aus den Fenstern. Gemäß $m(t) = m_0\,(1 - \omega t)^3$ nimmt daraufhin die (zu bremsende) Masse ab. Hier gilt also die Bewegungsgleichung $\dot{\vec{p}} = (m\dot{\vec{r}})^{\cdot} = \dot{m}\dot{\vec{r}} + m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$.

(a) Eindeutigkeitsrahmen (ER), Ansatz und Lösung $x(t) = ?$
[Hinweis: irgendwie müssen wohl in der Lösung Potenzen (vielleicht auch negative) von $(1 - \omega t)$ vorkommen.]

(b) Schreiben Sie $x(t)$ so auf, daß sich $\omega \to 0$ im Kopf ausführen läßt.

Aufgabe 17: Ladung im Magnetfeld (2+3=5 Punkte)



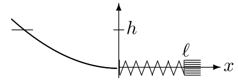
Ein geladenes Teilchen (m, q) fliegt zur Zeit $t = 0$ mit $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$ durch den Ursprung und wird durch ein konstantes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ abgelenkt: $\vec{K} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

(a) Ist der ER (3 Gln) aufgeschrieben, so *dürfen* wir ihn mit dem laut Skizze suggerierten Ansatz ($\vec{r}(t)$ als Kreisbewegung) befragen. Wie hängen Kreisfrequenz ω und Radius R mit den Größen m, q, v_0, B zusammen ?

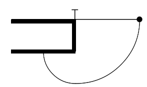
(b) Wie bei (a), aber das Teilchen erfahre zusätzlich die Reibungskraft $\vec{F} = -m\,k\,\vec{v}/v$. Nur $\vec{v}(t)$ möge jetzt interessieren, ermittelbar per Ansatz aus dem v-ER $\boxed{\dot{\vec{v}}(t) \equiv \ \ldots\ ,\ \vec{v}(0) = (0, v_0, 0)}$.

Auf der Suche nach einem klugen Ansatz blicken wir auf die bei (a) notierte Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ zurück (noch ω, R enthaltend) und ersetzen darin (mit „Spirale" im Hinterkopf) R durch eine unbekannte Funktion $R(t)$. Auch ω ist wieder ein unbekannter Parameter. Ob nun wirklich mit diesem $\vec{v}$–Ansatz der obige v-ER in jeder Beziehung erfüllbar ist? Wenn ja, sollte ein Restproblem der Form $\boxed{\dot{R}(t) \equiv\ \ldots\ ,\ R(0) =\ \ldots}$ übrig bleiben. Der R–ER ist leicht gelöst: $R(t) = ?$
Wann (t_1) kommt das Teilchen zur Ruhe? Machen Sie eine Dimensionsprobe für Ihr t_1 .

Aufgabe 18: Energieerhaltung, Potentiale (1+1+1+1=4 Punkte)

(a) 

Wie weit ($x = ?$) wird die gefederte (κ, ℓ) Absperrung eingedrückt werden, wenn ein in Höhe h startender reibungsfreier Skiläufer (m) in ihr landet ?



(b) Ein Pendel (ℓ, m) wird horizontal ausgelenkt und losgelassen. Mit welcher Geschwindigkeit v prallt es von unten gegen die $\ell/2$ dicke Tischplatte ?

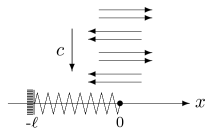
(c) 2D. Ob das Kraftfeld $\vec{K}(x, y) = (-\lambda x, \lambda y)$ ein Potential hat, soll sich bei komponentenweisem Aufleiten erweisen.

(d) Welches Potential $V(x)$ hat die Kraft $K_1 = -\gamma m M\,2x\,(R^2 + x^2)^{-3/2}$?

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 07** 26.11.2007

[Abgabe 03.12 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 19: Resonanz (3+1+1=5 Punkte)



Ein geladenes Teilchen $(m,\ q)$ ist an einer Feder $(\kappa,\ \ell)$ befestigt und ruht am Ursprung. Ab Zeit $t=0$ wird es von einer Lichtwelle (s. Ü14) getroffen, d.h. der Kraft $K_1 = -mk\sin(\omega t)$ ausgesetzt. 1D Problem.

(a) Eindeutigkeitsrahmen, Ansatz und Lösung $x(t) = ?$

[Hinweis: Mit $\sqrt{\kappa/m} =: \Omega$ und ω hat das Problem zwei Frequenzen. Also sind im Ansatz zwei Sorten trigonometrischer Funktionen nötig. Nützliche Abkürzungen: $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$.]

(b) Bei Übung 14 war (wenn man dort $v_0 = 0$ setzt) $x(t) = \frac{k}{\omega^2}\,s - \frac{k}{\omega}\,t \ =: x_{\text{ohneFeder}}(t)$ herausgekommen. Wie geht das (a)–Resultat in $x_{\text{ohneFeder}}(t)$ über?

(c) Auch der Limes $\Omega \to \omega$ ist am (a)–Resultat ausführbar (aber *vorsichtig*: $\Omega = \omega + \varepsilon$ setzen, umformen, und dann erst $\varepsilon \to 0$ ausführen). Das Resultat [nennen wir es $x_=(t)$] zeigt in einem (welchem?) seiner zwei Terme, was eine *Resonanzkatastrophe* ist.

[Hinweis: $\sin(\varepsilon t) \approx \varepsilon t + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$; $\cos(\varepsilon t) \approx 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$]

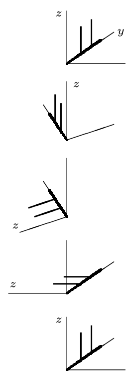
Aufgabe 20: Potentialbarriere und V_{eff} (1+1+1=3 Punkte)

(a) Mit mindestens welcher Fluchtgeschwindigkeit v_∞ muss ein Geschoß (Masse m) von der Oberfläche der Erde $(M,\ R)$ losgeschossen werden, damit es nie wieder zurückkehrt?

(b) Flucht aus dem Sonnensystem verlangt mehr: u_∞. Grob qualitativ betrachten Sie nur Erde und Sonne, nageln beide fest, setzen $u_\infty^2 = v_\infty^2\,(1+ \text{Zusatz})$ und schätzen den Zusatz mittels $M_{\text{sonne}} \approx 3\cdot 10^5\,M$ und Abstand Erde–Sonne $a \approx 3\cdot 10^4\,R$ ab.

(c) Welches Potential hat das Zentralkraftfeld $\vec{K} = -m\omega^2\vec{r}$? Und wie sieht das zugehörige effektive Potential aus? Skizzieren Sie grob V_{eff} über der r–Halbachse.

Aufgabe 21: Schiffbruch und Drehmatrizen (2.5+1.5=4 Punkte)



Bei schwerem Wetter kommt ein Zweimaster vom Nordkurs (y–Achse) ab. Er dreht sich um $\pi/4$ um die Vertikale, kentert dann nach links, zeigt anderntags wieder nach Norden und kann aufgerichtet werden. Zu jeder Position des Schiffes hat der Kapitän die Richtung notiert, in der er den Polarstern sieht. Vor dem Unwetter sah er ihn in Richtung $\vec{e} = (0,1,1)/\sqrt{2}$.

(a) Notieren Sie die zu den 4 Drehungen gehörigen Matrizen $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ und $D^{(4)}$ und ermitteln (aus dem jeweils vorangegangenen Einheitsvektor) die Polarstern–Richtungen $\vec{e}\,'$, $\vec{e}\,''$, $\vec{e}\,'''$, $\vec{e}\,''''$. *Hinweis:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

(b) Welches Produkt aus D's führt von der Startposition direkt zur übernächsten Position, bzw. zur überübernächsten bzw. zur letzten? Und welche Drehmatrizen kommen dabei jeweils heraus?

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 08** 03.12.2007

[Abgabe 10.12 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 22: Dreh-quickies (1+2+1=4 Punkte)

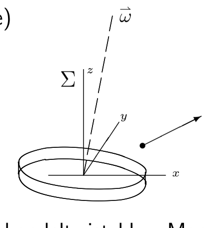
(a) Wenn allgemein $D = c\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - s\,\vec{e}\times$ gilt, dann ist sicherlich $D^T = ?$ Wie wird in dieser Sprache $D\,D^T$ zur Einheitsmatrix?

(b) Kann es sich bei $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ um eine Drehmatrix handeln (warum?)?

Geben Sie die Drehachse $\vec{e}$ und die Determinante von D an.

(c) Verschaffen Sie sich zur Matrix D aus (b) den Kosinus $(=: c)$ und den Sinus $(=: s)$ des Drehwinkels und bilden $c^2 + s^2$ zur Kontrolle.

Aufgabe 23: Drehmatrix: rotierende Raumstation (1+2+2+1=6 Punkte)



Astronauten möchten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}$ ihrer ringförmigen Station ermitteln. Sie schießen dazu ab Ursprung = Zentrum der Raumstation eine Leuchtkugel ins All und beobachten ihren Ort:

$$\vec{r}\,'(t) = v_0\,t \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(c+s) \\ 1+c-s \\ 1-c+s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} c = \cos(\omega t) \\ s = \sin(\omega t) \end{array} .$$

Daß es sich bei ω um den Betrag der gesuchten Winkelgeschwindigkeit handelt, ist klar. Man beginnt jedoch darüber zu streiten, ob die Entfernung der Kugel etwas mit ω zu tun hat.

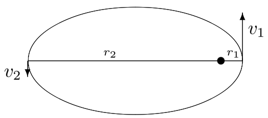
(a) Schlichten Sie den Streit durch Ausrechnen: $|\vec{r}\,'| = ?$

(b) Die Achsen des körperfesten Systems Σ' der Station mögen zu $t=0$ mit jenen des skizzierten Inertialsystems Σ zusammenfallen. Zu $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ haben wir drei Informationen. [1.] In Σ hat die Leuchtkugel konstante Geschwindigkeit, so daß $\vec{r} = v_0\,t\,\vec{a}$ gilt mit zeitlich konstantem (und dimensionslosem) Vektor $\vec{a}$. [2.] $D = c\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - s\,\vec{e}\times$ [3.] In der Gleichung $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ ist (nach beidseitigem Streichen von $v_0\,t$) Koeffizientenvergleich möglich: Terme mit c müssen sich kompensieren, ebenso Terme mit s und ebenso Terme ohne c oder s . Welche drei Gleichungen folgen? $\vec{e} = ?$

(c) Achse $\vec{e}$ und Drehwinkel ωt bekannt — welche neun Elemente hat also die Drehmatrix D ? Sp$(D) = ?$ Stehen z.B. der zweite und der dritte Spaltenvektor wirklich senkrecht aufeinander?

(d) Nun kann $\vec{a}$ auf zwei Weisen erhalten werden, via $D^T\vec{r}\,'$ oder aus den drei Gleichungen aus Teil (b). Wählen Sie den bequemer erscheinenden Weg. Ist $|\vec{r}| = |\vec{r}\,'|$ erfüllt?

Aufgabe 24: Erhaltungssätze (1+1=2 Punkte)



Zur elliptischen Bahn eines Kometen (Masse m) ist der kleinste (r_1) und der größte Abstand (r_2) von der Sonne (M) bekannt.

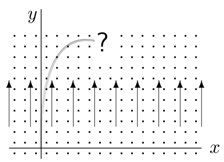
(a) Die Erhaltungssätze liefern zwei Gleichungen für die Geschwindigkeiten an diesen zwei extremalen Punkten: $v_1 = ?$ und $v_2 = ?$

(b) Im Diagramm $V_{\text{eff}}(r)$ über r liegen bei r_1, r_2 die Schnittpunkte mit der E–Horizontalen (Skizze!). Berechnen Sie aus $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2)$ den Drehimpuls $L = ?$ des Kometen (als Funktion von r_1, r_2) und aus diesem zur Kontrolle erneut z.B. v_1 .

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 09** 10.12.2007

[Abgabe 17.12 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 25: Bewegungsgleichung lösen (3+2=5 Punkte)



Ein geladenes Teilchen (q, m; zu $t=0$ bei $\vec r(0)=\vec 0$ mit $\vec v(0)=\vec 0$) befindet sich in einem Magnetfeld $\vec B=(0\,,0\,,B)$ und einem elektrischen Feld $\vec E=(0\,,E\,,0)$ (E und B positiv und konstant).
[Hinweis: Kräfte? Standen am Anfang von Kap.3, s. Skript S.17.]

(a) Zuerst notieren Sie natürlich den ER für $\vec v$. Durch Abspalten eines konstanten Vektors $\vec a$ kann nun per $\vec v=\vec u+\vec a$ zu einer neuen unbekannten Vektorfunktion $\vec u(t)$ übergegangen werden. Wir bestimmen $\vec a$ so, daß ein möglichst einfacher ER für $\vec u$ übrig bleibt, nämlich? Lösung $\vec u(t)=?$ — und folglich $\vec v(t)=?$

(b) Durch komponentenweises Aufleiten erhalten Sie auch $\vec r(t)$. In Parameterdarstellung (Parameter t) ist damit die in der xy–Ebene liegende Bahnkurve des Teilchens bekannt. Sie soll grob qualitativ skizziert werden. Zu welchen Zeiten t_n berührt das Teilchen die x–Achse ?

Aufgabe 26: Quickies (1+1=2 Punkte)

(a) ER: $\boxed{\dot{\vec v}=\frac{qB}{m}(\vec v\times\vec e_3)\,,\ \vec v(0)=v_0\vec e_1}$. Also ist $\vec v(t)=?$

(b) Wie löst man $\dot v=-\lambda\, v^n$ für $n>1$? $v(t)=?$
[Hinweis: Tricks wie $v\dot v=\partial_t(v^2/2)$ kennen wir ja schon]

Aufgabe 27: Drehmatrix und Achse (1.5+0.5+1.5+1.5=5 Punkte)

Vor einiger Zeit (in **Ü8a**) hatten wir ein VONS $\vec f_j$ konstruiert und somit unsere erste Drehmatrix (nebenstehendes D) erhalten.

$$D=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&4&-4\\-4&8&1\\4&1&8\end{pmatrix}$$

(a) Daß $DD^T=\mathbb{1}$ gilt, ist wegen $\vec f$–Orthonormierung trivial. Ob auch $D^TD=?$ dasselbe liefert ? Um welche Achse $\vec b=?$ dreht D ?

(b) In **Ü8a** war auch vom Ort $\vec r=(7,4,-4)\,a$ eines Teilchens (der Masse m) die Rede und von seiner dortigen Geschwindigkeit $\vec v=(1,4,-1)\,u$. Welche Komponenten bekommen $\vec r$ und $\vec v$ im neuen System, d.h. $\vec r\,'=?$ und $\vec v\,'=?$

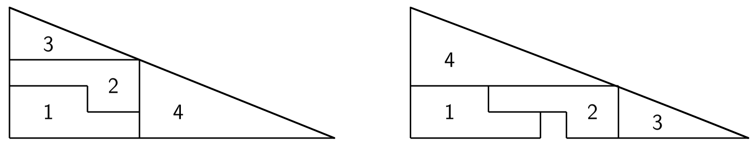
(c) Rechnen Sie nun den Drehimpuls $\vec L$ des Teilchens im alten System aus, bilden $\vec L\,'=D\,\vec L$ und sehen nach, ob dies auch per $m\,\vec r\,'\times\vec v\,'$ herauskommt.

(d) Verschaffen Sie sich schließlich den Kosinus ($=:c$) und den Sinus ($=:s$) des Drehwinkels und bilden c^2+s^2 zur Kontrolle.

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 10** 17.12.2007

[Abgabe 7.01.2008 ; alle Aufgaben dieses Blattes sind freiwillig]

Aufgabe 28: Flächenerhaltung?! (2 Punkte)



Obwohl hier nur Flächenstücke anders zusammengefügt wurden, entstand rechts eine Lücke. Das steht in eklatantem Widerspruch zum Erhaltungssatz der Fläche!! Können Sie aufklären?

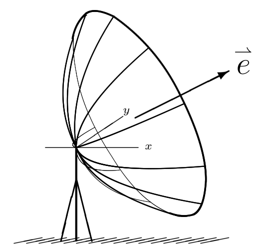
Aufgabe 29: Hauptachsentransformation (4+2=6 Punkte)

(a) Unterziehen Sie die angegebene Matrix A dem vollen Programm (I – VII) der Hauptachsen–Transformation. Bitte jede Station des "Rezeptes" abarbeiten (manchmal reicht ein OK).

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$$

(b) Newton diktiert Ihnen $\boxed{\ddot{\vec r}=-\omega^2 A\,\vec r\,,\ \dot{\vec r}(0)=\vec 0\,,\ \vec r(0)=\frac{2}{3}R\,(4\,,1\,,-1)}$. Welche Gestalt nimmt dieser ER im Hauptachsen–System an, d.h. wie sieht der ER für $\vec r\,'(t)$ aus? Komponentenweise gelesen, sind das drei ER's — mit je welcher Lösung?

Aufgabe 30: HT 2 (3+2+1=6 Punkte)



Bei Ihrer Wanderung durch Chile stoßen Sie auf ein verrostetes Radioteleskop. Sie ermitteln die Gleichung der Schüsseloberfläche:

$$5x^2+5y^2+8z^2-8xy-4xz-4yz=b\,(2x+2y+z)\qquad(*)$$

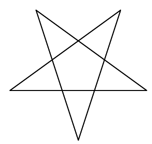
Nun fragen Sie sich, um was für eine Fläche es sich wohl handelt und aus welcher Richtung $\vec e$ die letzten Signale empfangen wurden.

(a) Sie erkennen, daß $(*)$ die Struktur $\vec r H\vec r=\vec a\vec r$ hat, notieren die symmetrische Matrix H, den Vektor $\vec a$ und gehen nun zu H das Hauptachsen–Rezept durch.

(b) Wie sieht $(*)$ im Hauptachsensystem aus? Was für ein "...oid" ist es also ? Wie lautet die Antwort $\vec e=?$ auf Ihre Frage nach der Richtung des letzten Signalempfangs?

(c) Alle Randpunkte der Schüssel mögen auf der Ebene $\vec e\vec r=c$ liegen. Wenn $b=300\,$m und $c=4\,$m, wie weit sind dann die Randpunkte von der Symmetrieachse $\vec e$ entfernt ?

Aufgabe 31: Knobelei (2 Punkte)



Durch den skizzierten fünfzackigen Stern sollen zwei Geraden (je ∞ lang) so gelegt werden, daß zehn Dreiecke entstehen. Natürlich sind "anständige" (= innen leere) Dreiecke gemeint, von denen bereits fünf in der Figur zu sehen sind.

!!! Frohe Weihnachten !!!

Lösung 10

29 (a) I OK

II $\det(A-\lambda 1) = \ldots = (1-\lambda)(4-\lambda)(7-\lambda)$, $\lambda_{1/2/3} = \{1,4,7\}$

III $Sp(A) = 3+4+5 = 12$, $\sum \lambda_i = 12$ ✓

IV $(A-\lambda_1 1)\vec{f}_1 = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\vec{f}_1 \Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{f}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\vec{f}_3 = 0 \Rightarrow \vec{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

V Ortho : OK (geht im Kopf)

VI Rechts? z.B. $\vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{9}(3,-6,6) = \vec{f}_3$ ✓

VII $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\boxed{\ddot{\vec{r}}' = -\omega^2 A' \vec{r}' , \ \dot{\vec{r}}'(0) = D\vec{0} = \vec{0} , \ \vec{r}'(0) = \frac{2}{3} R\, D\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2R}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2R\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}' = -\omega^2 x' , \ \dot{x}'(0) = 0 , \ x'(0) = 2R \\ \ddot{y}' = -4\omega^2 y' , \ \dot{y}'(0) = 0 , \ y'(0) = -2R \\ \ddot{z}' = -7\omega^2 z' , \ \dot{z}'(0) = 0 , \ z'(0) = 0 \end{array}\right\} \ \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2R\cos(\omega t) \\ -2R\cos(2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

30 (a) $H = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = 6\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

I OK

II $\det(H-\lambda 1) = \ldots = -\lambda(9-\lambda)^2$, $\lambda_{1/2/3} = \{0,9,9\}$ Entartung!

III $5+5+8 = 9+9$ ✓

IV $H\vec{f}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_{2,3}: \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$ (z.B.) $\vec{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

V, VI : $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

VII $H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $9y'^2 + 9z'^2 = \vec{a}'\vec{r}'$, $\vec{a}' = D\vec{a} = 6D\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 36\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 36x'$

$x' = \frac{3}{4}(y'^2 + z'^2)$ ist Rotationsparaboloid ,

$\vec{e}$ ist $\vec{f}_1$, also $\vec{e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{e}'\vec{r}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\vec{r}' = x' = c$, $4m = \frac{1}{100m}(y'^2 + z'^2) \Rightarrow \underline{20m}$

28, 31 verrate ich nicht.. selber..

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 11** 07.01.2008

[Abgabe 14.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 32: Exponentialfunktion (3+3=6 Punkte)

(a) Ein Schiff (Masse m), bei $x(0)=0$ mit $\dot{x}(0)=0$ startend, erfährt eine konstante Schubkraft $m\,k$ sowie die Wasser–Reibungskraft $-m\,\alpha\,v$. Schreiben Sie den v–ER für dieses 1D Problem auf, und lösen Sie ihn für v und $x(t)$ durch Aufleiten. Mit welcher t–Potenz startet das Schiff ?

(b) Die Anzahl $N(t)$ von Elefanten verändere sich gemäß $\boxed{\dot{N} = \alpha\,N - \beta\,N^2 \ , \ N(0) = N_0}$ wobei α, β positive Konstanten sind . $N(t) = ?$ [*Hinweis:* der ER für die Hilfsfunktion $\eta(t) = 1/N(t)$ könnte viel einfacher zu lösen sein.] Welche ferne Zukunft $N \to ?$ bei $t \to \infty$ hat die Population ?

((Die N–Dgl ensteht, wenn man in $\dot{N} = G\cdot N - S\cdot N$ die Sterberate $S = S_0$ konstant setzt, aber die Geburtenrate G am Bestand z.B. von Futterpflanzen orientiert, welcher seinerseits linear mit der Anzahl der Tiere abnehme : $G = G_0 - \beta\cdot N$, so daß $\alpha = G_0 - S_0$. Ein sehr optimistisches (Elefanten-) Welt-modell.))

Aufgabe 33: Dgl–Lösungsmethoden (0.5+1+1+0.5+0.5+0.5=4 Punkte)

Ein Fallschirmspringer erfährt eine Luft-Reibungskraft proportional zu seiner Fallgeschwindigkeit $v(t)$, welche also dem folgenden ER genügt: $\boxed{\dot{v} = -\lambda\,v - g \ , \ v(0) = 0}$ Untersuchen Sie nun verschiedene Lösungsmethoden.

(a) Welcher Ansatz empfiehlt sich hier ? Vielleicht gelingt es Ihnen durch "scharfes Hinsehen", die Lösung bereits jetzt direkt hinzuschreiben?

(b) Wie funktioniert die Lösungsmethode $v(t) = u(t) + a$, wobei Sie die Konstante a am besten gleich so festlegen, daß der g–Term verschwindet?

(c) Eine anderer Ansatz ist $v(t) = e^{-\lambda t}\cdot w(t)$. Führt auch er zum (gleichen) Ziel?

(d) Welche η–Dgl folgt für den Ansatz $v(t) = 1/\eta(t)$? [Ist hier keine Vereinfachung, also nicht zu lösen versuchen.]

(e) $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = ?$ — aber das zeigte doch schon die Dgl, nämlich inwiefern ?

(f) Mit welcher der obigen Lösungsmethoden liegt man auch bei $\dot{v} = -\lambda v - g(t)$ noch richtig ?

Aufgabe 34: (Potenzreihe als Ansatz, um ein Dgl–Problem zu lösen) (2 Punkte)

Problem: $\boxed{\ddot{x} = 2\,a\,\omega^2\,e^{-x/a} - \frac{1}{a}\,\dot{x}^2 \ , \ \dot{x}(0) = 0 \ , \ x(0) = 0}$. $x(t) = ?$

Lösungsanleitung: Wir setzen $x(t) = a\,(\,c_2\,t^2 + c_4\,t^4 + c_6\,t^6 + \ldots\,)$ an, haben damit die Anfangsbedingungen bereits erfüllt, und bestimmen c_2 , c_4 und c_6 aus der Dgl.

[Nächste Woche werden wir die Funktion kennenlernen, deren Potenzreihenanfang wir gerade erhalten haben.]

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 12** 14.01.2008

[Abgabe 21.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 35: (Reihenanfang, um ein Problem vorab zu vereinfachen) (1+2+1+2=6 Punkte)

In jedem der folgenden vier Fälle schwingt eine Masse m um den Ursprung im Potential $V(x) = \kappa\, a^2 f(x/a)$, und genügt damit der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$. Nach Reihenentwicklung von $f(s)$ bis mit s^2 (Taylor–Reihe verboten!) kann per $V(x) = \text{const} + \frac{1}{2}\kappa_{\text{eff}}\, x^2$ ein effektives Kappa abgelesen und folglich die Frequenz in der sich so ergebenden Schwingungsgleichung $\ddot{x} = -\omega^2 x$ als $\omega = \sqrt{\kappa_{\text{eff}}/m}$ angegeben werden.

(a) $f(s) = \dfrac{1}{s^2}\Big(\cos(s) - \cos\left[\sinh(s)\right]\Big)$ [Lsg: $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{3\,m}}$ — aber wie kommt dies heraus?]

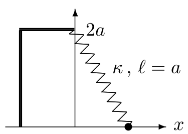
(b) $f(s) = \dfrac{2\,\cosh(s)}{2 - \cosh^2(s)} = \partial_s \ln\left(\dfrac{1+\sinh(s)}{1-\sinh(s)}\right)$

einmal via ch–Reihenanfang, zum anderen per Entwicklung des ln.

(c) $f(s) = -\dfrac{\ln\left[1+\cosh(s)\right]}{\cosh(s)}$

[Hinweis: $\ln(2+x) = \ln(2) + \ln(1+x/2) \approx \ln(2) + x/2 + ...$]

(d) m kann sich nur auf der x–Achse bewegen. Eine in Höhe $2\,a$ befestigte Feder (κ, $\ell = a$) sorgt für rücktreibende Kraft. $f(s) = ?$ Und $\omega = ?$



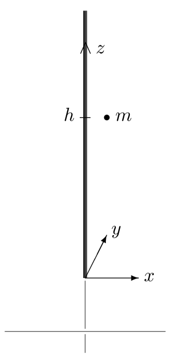
Aufgabe 36: (Potenzreihe als Ansatz, um ein Dgl–Problem zu lösen) (2 Punkte)

Problem: $\boxed{\ddot{x} = 2\,a\,\omega^2\,e^{-x/a} - \frac{1}{a}\,\dot{x}^2\ ,\ \ \dot{x}(0) = 0\ ,\ \ x(0) = 0}$. $x(t) = ?$

In **Ü34** hatten Sie den Reihenanfang der Lösung als $x(t) = a\,\left(\omega^2\,t^2 - \frac{1}{2}\omega^4\,t^4 + \frac{1}{3}\omega^6\,t^6 + \dots\right)$ erhalten. Von welcher Funktion $x(t)$ könnte dieser Reihenanfang stammen? Erhärten Sie Ihre Vermutung, indem Sie explizit nachsehen, ob Ihr $x(t)$ den obigen x–ER tatsächlich erfüllt.

Aufgabe 37: (Reihenanfänge zur Resultat–Diskussion) (1.5+1.5=3 Punkte)

Ein stabförmiger Himmelskörper wurde entdeckt. Er beginnt im Ursprung, ist unendlich dünn und unendlich lang, hat konstante lineare Massendichte σ (:= Masse pro Höhenintervall) und zieht eine Probemasse m an, die sich irgendwo bei $\vec{r}$ befindet. Am Anfang des Sommersemesters werden wir in der Lage sein, das Potential $V(\vec{r})$ dieser Kraft auszurechnen: $V(\vec{r}) = \gamma\, m\, \sigma \ln\left(\sqrt{z^2+\rho^2} - z\right)$ mit $\rho^2 := x^2 + y^2$.



(a) Wenn sich m bei festem $z = h$ dem Stab nähert, sollte die Anziehungskraft nichts mehr vom „weit weg" erscheinenden Stabende bemerken können. Ermitteln Sie den bezüglich $\rho \to 0$ asymptotisch führenden V–Term und aus diesem die Kraft $\vec{K}$ auf m. Nähert sich m hingegen auf der z–Achse von unten her dem Stabende ($z = -\varepsilon$), so unterscheidet sich $V(\varepsilon)$ ein klein wenig vom obigen $V(\rho)$, nämlich wodurch?

(b) Wenn Sie m auf einem zur x–Achse parallelen geraden Draht bei $z = -a$ reibungsfrei gleiten lassen, so vollführt sie dort kleine Schwingungen mit $\omega^2 = ?$ Dimensionsprobe!

Übungen zu EMTP I **Blatt Nr. 13** 21.01.2008

[Abgabe 28.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 38: Potenzreihen (1+1+1+1=4 Punkte)

Geben Sie jeweils die ersten drei Terme der folgenden Reihen an:

(a) Reihe aus Reihe der Ableitung gewinnen:
$\partial_x \arctan(x) = \dots =$ Reihe davon $\Rightarrow$ Reihe des $\arctan(x)$ für $x \ll 1$

(b) Reihe aus Division von Reihen gewinnen: $\tan(x) = \frac{\sin-\text{Reihe}}{\cos-\text{Reihe}} = \dots\ (x \ll 1)$

(c) $v \ll c$: $\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dots$

(d) $p \ll mc$: $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \dots$

Aufgabe 39: Taylor (1 Punkt)

Wiederholen Sie **Aufgabe 35 (a)**, aber diesmal per Taylor-Reihe.

Wie einfach war es doch dort, *ohne* Taylor $f(s) = \frac{s^2}{6} + \mathcal{O}(s^4)$ zu erhalten! Nämlich so:
$f(s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!} + ... - \left\{1 - \frac{1}{2}\left[s + \frac{s^3}{3!} + ...\right]^2 + \frac{1}{4!}\left[s + ...\right]^4 + ...\right\}\right) = \frac{1}{s^2}\frac{s^4}{3!} + ...$

Aufgabe 40: vier quickies mit i (0.5+0.5+0.5+0.5=2 Punkte)

Zur Erinnerung: jede komplexe Zahl z kann man als $z = a + ib$ schreiben.

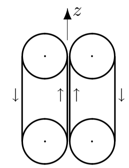
(a) $\frac{1+i}{1-i} = ?$

(b) $\text{Re}\left(\frac{1}{1+i\,\sinh(x)}\right) = ?$

(c) $\tanh(ix) = ?$

(d) Wie folgen aus $e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}e^{i\alpha}$ die Relationen $\cos(2\alpha) = \dots$ und $\sin(2\alpha) = \dots$?

Aufgabe 41: e hoch Matrix (0.5+2.5+2=5 Punkte)



Die skizzierten Keilriemen haben je Masse M und laufen über masselose, reibungsfreie Rollen. Auf der z–Achse berühren sie sich und erfahren dort die Reibungskraft $-M\,\alpha$ mal Relativgeschwindigkeit. Wäre also $v_1 = v_2$, so würden sie ewig vor sich hin schnurren — aber es ist nicht so : siehe die Anfangsbedingung im ER bei (a).

(a) Aus v_1, v_2 werde formal ein Vektor $\vec{v}$ gebildet. $\boxed{\dot{\vec{v}} = -\alpha\, H\, \vec{v}\ ,\ \ \vec{v}(0) = v_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$
Können Sie die Matrix H im ER angeben?

(b) Erster Weg: Normierte Eigenvektoren von H ermitteln, $\vec{v} = A(t)\,\vec{f}_1 + B(t)\,\vec{f}_2$ ansetzen, ER's für $A(t)$ und für $B(t)$ aufschreiben, beide lösen, $\vec{v}$ notieren und vereinfachen. $\vec{v}(t \to \infty) = ?$ wirkt nun sehr beruhigend.

(c) Zweiter Weg: Ob man so tun kann, als wäre H eine Zahl ?! Dann kann man ja die Lösung sofort niederschreiben! Auch $H = 1 - R$ (R wie Restmatrix) ist möglich sowie Abspalten eines Vorfaktors $e^{-\alpha t}$. $R \cdot R = ?$ In der e–Reihe gibt es also nur Terme $\sim R$ und $\sim$ Einheitsmatrix – OK ? – und diese Terme lassen sich separat wieder aufsummieren. Kommt das $\vec{v}$–Resultat von (b) wieder heraus?

Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 14**	28.01.2008

[Abgabe 04.02 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 42: Störungsrechnung ausprobieren (1.5+2.5=4 Punkte)

(a) In Aufgabe **34,36** hatten wir zu $\boxed{\ddot{x} = 2\,a\,\omega^2\,e^{-x/a} - \frac{1}{a}\,\dot{x}^2\ ,\ \dot{x}(0)=0\ ,\ x(0)=0}$ die exakte Lösung $x(t) = a\ln(1+\omega^2t^2)$ erhalten. Per Störungsrechnung erster Ordnung in ω^2 sollte sich also $x(t) = a\,\omega^2 t^2$ ergeben. Wie?

(b) Auch zu $\boxed{\dot{v} = -\lambda\,(1+\omega t)\,v\ ,\ v(0)=v_0}$ kennen wir mit $v(t) = v_0\,e^{-\lambda t - \lambda\omega t^2/2}$ die exakte Lösung (bestätigen Sie dies durch Einsetzen). Worauf sollte also Störungsrechnung erster Ordnung in ω führen? Welchen ER erfüllt $v^{(0)}$? Mit welcher Lösung? Der ER für $v^{(1)}$ sieht nur im ersten Moment kompliziert aus, denn Übergang zu einer neuen Funktion u via $v^{(1)} = e^{-\lambda t}\,u$ vereinfacht die Differentialgleichung. Demnach ist $v^{(1)} = \,?$ Schließlich notieren wir $v^{(0)} + v^{(1)}$ und vergleichen mit obiger Erwartung.

Aufgabe 43: Störungsrechnung anwenden (5 Punkte)

Die Story: Mitte 2008 geht der Teilchenbeschleuniger LHC am CERN (Schweiz) in Betrieb. Dabei misslingt die Kalibrierung, und kurzzeitig entwischen ein paar Teilchen nach oben, bewegen sich also im Gravitationspotential $V = -\gamma mM/r$. Die Fluchtgeschwindigkeit ist weit überschritten, d.h. für alle x ist $E \gg V(x)$, oder auch: γ ist winzig. Später (die Erde ist aus Sicht des Teilchens längst punktförmig) wird ein solches Teilchen auf einem fernen Planeten registriert, nämlich zur Zeit $t_1 = a/v_0$ bei $x(t_1) = a$ mit $\dot{x}(t_1) = v_0$. Zu welcher Zeit t_0 ist das Teilchen am LHC verlorengegangen?

Was zu tun ist: Der ER für $x(t)$ enthält natürlich $\ddot{x} = -\gamma M/x^2$ als Dgl und die beiden oben angegebenen Daten zur Zeit t_1. Welche drei ER's für $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ entstehen bei Störungsrechnung nach γ? Lösen Sie die ersten beiden. Aus welcher Gleichung ist t_0 zu ermitteln? Welche zwei (der vier) Terme in $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ kann man dabei vernachlässigen?

Wer t_0 sogar explizit anzugeben vermag, verdient 2 Zusatzpunkte.

Aufgabe 44: Störungsrechnung (1+0.5+0.5+2=4 Punkte)

Eine (bei Glatteis) auf der x–Achse mit $v(0) = v_0$ startende Person (m) erfährt die Reibungskraft $-m\alpha v + m\beta\,\frac{1}{t}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$.

(a) ER für $v(t)$?

(b) Hat der β–Term überhaupt bremsende Wirkung? Warum?

(c) Der Faktor β ist sehr klein. Dimension von $\beta \;\Rightarrow\; \beta \ll\,?$ als Bedingung.

(d) Welchen Beitrag $v^{(1)}(t)$ liefert Störungsrechnung erster Ordnung in β?

Hinweise zur Klausur

- Anmeldung in Listen (in Übung oder Vorlesung), oder per Email, bis 4.2.08
- Klausur I: 11.2.08 von 9:30–11:30 in H6 (mind. 10min vorher da sein)
- Klausur II: 31.3.08 von 9:30–11:30 in H1 (mind. 10min vorher da sein)
- erlaubt: Spickzettel, eigene Ü-Lsn, Vorl-Skript, Physik mit Bleistift
- nicht erlaubt: Computer, Taschenrechner, Handy
- ca. 20 Seiten leeres Papier mitbringen, Name und Matr-Nr je oben rechts
- Studentenausweis und Personalausweis mitbringen

<u>Lösung 14</u>

42 (a) $\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} = 2a\omega^2 e^{-x/a} - \frac{1}{a}\left(\dot{x}^{(0)2} + 2\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)}\right)$

$\boxed{\ddot{x}^{(0)} = -\frac{\dot{x}^{(0)2}}{a},\ \dot{x}^{(0)}=0,\ x^{(0)}=0}$ $\left(\left(\dot{v} = -\frac{v^2}{a},\ v(0)=0\right)\right) \Rightarrow \underline{x^{(0)} \equiv 0}$

$\boxed{\ddot{x}^{(1)} = 2a\omega^2,\ \dot{x}^{(1)}(0)=0,\ x^{(1)}(0)=0}$ $\Rightarrow x^{(1)} = a\omega^2 t^2$ ged.

(b) $\dot{v} = v_0(-\lambda - \lambda\omega t)e^{-\cdots} = -\lambda(1+\omega t)v$ ✓✓

$v^{(0)} + v^{(1)} \overset{?!}{=} v_0 e^{-\lambda t}\left(1 - \frac{\lambda\omega}{2}t^2\right)$

$\boxed{\dot{v}^{(0)} = -\lambda v^{(0)},\ v^{(0)} = v_0}$ $\Rightarrow v^{(0)} = v_0 e^{-\lambda t}$

$\boxed{\dot{v}^{(1)} = -\lambda v^{(1)} - \lambda\omega t\, v_0 e^{-\lambda t},\ v^{(1)}(0)=0}$, Subst. $v^{(1)} = e^{-\lambda t}u$

$\Rightarrow \boxed{\dot{u} = -\lambda v_0\omega t,\ u(0)=0}$ $\Rightarrow u = -\frac{\lambda}{2}v_0\omega t^2,\ v^{(1)} = -v_0 e^{-\lambda t}\frac{\lambda\omega}{2}t^2$

$\rightsquigarrow v^{(0)} + v^{(1)} = v_0 e^{-\lambda t}\left(1 - \frac{\lambda\omega}{2}t^2\right)$, toll!

43 $\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)} = \frac{-\gamma M}{(x^{(0)} + x^{(1)})^2} = \frac{-\gamma M}{x^{(0)2}} + \frac{2\gamma M x^{(1)}}{x^{(0)3}}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}^{(0)} = 0,\ \dot{x}^{(0)}(t_1) = v_0,\ x^{(0)}(t_1) = a}$

$\boxed{\ddot{x}^{(1)} = \frac{-\gamma M}{x^{(0)2}},\ \dot{x}^{(1)}(t_1)=0,\ x^{(1)}(t_1)=0}$ $\boxed{\ddot{x}^{(2)} = 2\gamma M\frac{x^{(1)}}{x^{(0)3}},\ \dot{x}^{(2)}(t_1)=0,\ x^{(2)}(t_1)=0}$

$x^{(0)} = A + Bt,\ B = v_0,\ A + v_0 t_1 = a,\ A = 0,\ \underline{x^{(0)} = v_0 t}$

$\ddot{x}^{(1)} = -\frac{\gamma M}{v_0^2}\frac{1}{t^2}$, $\rightsquigarrow$ Ansatz $x^{(1)} = C + Dt + E\ln(t)$

$\Rightarrow -E = -\frac{\gamma M}{v_0^2};\ \dot{x}^{(1)}(t_1) = D + \frac{E}{t_1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow D = -\frac{v_0}{a}E = -\frac{\gamma M}{a v_0};$

$x^{(1)}(t_1) = C - \frac{\gamma M}{a v_0}t_1 + \frac{\gamma M}{v_0^2}\ln(t_1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = \frac{\gamma M}{v_0^2} - \frac{\gamma M}{v_0^2}\ln\left(\frac{a}{v_0}\right);$

$\rightsquigarrow x^{(1)}(t) = \frac{\gamma M}{v_0^2} - \frac{\gamma M}{a v_0}t + \frac{\gamma M}{v_0^2}\ln\left(\frac{v_0}{a}t\right)$

$\Rightarrow t_0$ aus $x(t_0) \overset{!}{=} 0$, d.h. $0 \overset{!}{=} v_0 t_0 + \underbrace{\frac{\gamma M}{v_0^2} - \frac{\gamma M}{a v_0}t_0}_{\text{klein gegen dominierenden ln}} + \frac{\gamma M}{v_0^2}\ln\left(\frac{v_0}{a}t_0\right)$

((Zusatz: $\frac{v_0}{a}t_0 =: \tau,\ \frac{\gamma M}{a v_0^2} =: \varepsilon,\ \tau = \varepsilon\ln\left(\frac{1}{\tau}\right),\ \ln\left(\frac{1}{\tau}\right) = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)$ und
1. Iteration: $\tau \approx \varepsilon$ im kleinen $\ln(\ln) \Rightarrow \tau = \varepsilon\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ t_0 = \frac{\gamma M}{v_0^3}\ln\left(\frac{a v_0^2}{\gamma M}\right)$))

44 (a) $\boxed{\dot{v} = -\alpha v + \beta\frac{1}{t}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right),\ v(0) = v_0}$

(b) Ok, weil $v < v_0$ wird, d.h. ln negativ

(c) $[\beta] = [\dot{v}t] = [v] \Rightarrow \beta \ll v_0$

(d) $\boxed{\dot{v}^{(0)} = -\alpha v^{(0)},\ v^{(0)}(0) = v_0}$ $\Rightarrow v^{(0)}(t) = v_0 e^{-\alpha t}$

$\dot{v}^{(1)} \overset{!}{=} -\alpha v^{(1)} + \beta\frac{1}{t}\ln\left(\frac{v^{(0)}}{v_0}\right)$

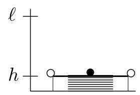
$\boxed{\dot{v}^{(1)} \overset{!}{=} -\alpha v^{(1)} - \alpha\beta,\ v^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow v^{(1)}(t) = -\beta + \beta e^{-\alpha t}$

Probeklausur zu EMTP I	Uni Bielefeld	WS 07/08

[Materialien bereitlegen ; Wecker auf 2 Stunden stellen ; Alle Aufgaben lesen, selektiv bearbeiten]
[Nach 2h Blatt umdrehen, korrigieren ; 30 Punkte, bei ≥ 9 hätten Sie bestanden]

Aufgabe 1: Western (2 Punkte)
Die Räder (Durchmesser 0.8 Meter, 17 Speichen) einer Kutsche scheinen im Fernsehen (Bildfrequenz 50/Sekunde) still zu stehen. Mit welchen möglichen Geschwindigkeiten v fährt die Kutsche?

Aufgabe 2: Energieerhaltung, Bwgl (3+1=4 Punkte)
Jemand (Masse m) sitzt auf einem gefederten Stuhl (Feder: κ, ℓ), dessen Sitzfläche in Höhe $h < \ell$ festgebunden ist ($h, \ell \ll R_{\mathrm{Erde}}$). Die Leinen werden nun gekappt.
(a) Mit welcher Geschwindigkeit v löst sie sich vom Sitz? Es war also $\kappa > \kappa_{\min} = ?$
(b) Wie sähe der ER zu diesem Problem, aber mit angeschnallter Person, aus?



Aufgabe 3: Drehungen (3 Punkte)
Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze, wohin die neuen Einheitsvektoren $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ zeigen, wenn man das Koordinatensystem zuerst um $\pi/2$ um die z–Achse dreht und danach um $\pi/2$ um die x–Achse. Zeigen Sie, daß auch das Produkt D der beiden Drehmatrizen zeilenweise die $\vec{f}$'s zeigt. Finden Sie einen Vektor $\vec{b}$, dessen Komponenten sich unter D nicht verändern.

Aufgabe 4: Substitution (2+2=4 Punkte)
Lösen Sie die folgenden ER's durch die Substitution $v(t) = e^{f(t)}$. [*Hinweis zu (b):* $e^{ab} = (e^a)^b$]
(a) $\boxed{\dot{v} = -\lambda(1+\omega t)v\ ,\ v(0) = v_0}$ (b) $\boxed{\dot{v} = -\frac{\lambda}{(1+\omega t)}\, v\ ,\ v(0) = v_0}$

Aufgabe 5: Differentialgleichung umformen (2+2=4 Punkte)
Lösen Sie die folgenden ER's durch geschicktes Umformen: v aus dem Nenner herausmultiplizieren, Differentialgleichung als $(..)^\bullet = (..)^\bullet$ schreiben, Konstante bestimmen, Lösung angeben.
(a) $\boxed{\dot{v} = -\lambda/v\ ,\ v(0) = v_0}$ (b) $\boxed{\dot{v} = -\lambda/v^n\ ,\ v(0) = v_0}$ $(n \neq -1)$ [check: $n = 1 \Rightarrow$ (a)?]

Aufgabe 6: Potential (2 Punkte)
Unter welcher Bedingung hat die Kraft $\vec{K} = (-\alpha x^2, \beta z, \gamma y)$ ein Potential? Welches?

Aufgabe 7: Hauptachsen (2+2=4 Punkte)
(a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Eigenwerte λ_1 und λ_2? Zugehörige Eigenvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$? Sind diese automatisch orthogonal? $D = ?$ [$H' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D\,H\,D^{\mathrm{T}}$]
(b) $H = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Wie lauten die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3? Ist $Sp(H) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$?

Aufgabe 8: Potenzreihen-Entwicklungen (1+1+1=3 Punkte)
(a) $\ln(\sqrt{4+\varepsilon^2}) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ (b) $\ln(e^{2\varepsilon}-1) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ (c) $\ln(2e^{\varepsilon}\sinh(\varepsilon)) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$

Aufgabe 9: Ableitung der Umkehrfunktion (1 Punkt)
Angenommen die Exponentialfunktion wird als Umkehrfunktion von $\ln(x)$ eingeführt, wovon man wiederum $\partial_x \ln(x) = 1/x$ weiß. Wie erhält man dann $\partial_x \exp(x) = ?$

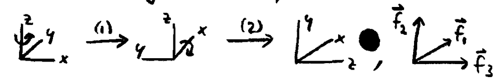
Aufgabe 10: Störungsrechnung (3 Punkte)
Zum 1D Oszillator $\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x\ ,\ \dot{x}(0) = 0\ ,\ x(0) = a}$ sollte Störungsrechnung nach ω^2 zum Anfang der Kosinus–Reihe führen. Ist es so? Berechnen Sie $x(t) = x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \mathcal{O}(\omega^6)$.

Lösung

① $v = \frac{ds}{dt} = \frac{n \cdot d\varphi \cdot R}{dt} = \frac{n \cdot \frac{2\pi}{17} \cdot \frac{0.8\,m}{2}}{1/50\ s} = n \cdot \frac{40\pi}{17}\frac{m}{s}$ $\left(\left(\approx n \cdot 7.39 \frac{m}{s}\right)\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

② (a) $E_{z=h} = E_{z=\ell}$, $mgh + \frac{\kappa}{2}(\ell-h)^2 = \frac{m}{2}v^2 + mg\ell \Rightarrow v = \sqrt{\ell-h}\sqrt{\frac{\kappa}{m}(\ell-h) - 2g}$
$\kappa_{\min} = 2gm/(\ell-h)$, damit $\sqrt{\geq 0}$

(b) $m\ddot{z} = -mg + \kappa(\ell - z)$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(0) = h$

③ 

$D = D_{x,\frac{\pi}{2}} D_{z,\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ (a) $\dot{f} = -\lambda(1+\omega t)$, $f = \mathrm{const}_t - \lambda(t + \frac{1}{2}\omega t^2)$, $f(0) = \mathrm{const}_t = \ln(v_0) \Rightarrow v(t) = v_0\, e^{-\lambda(t+\frac{1}{2}\omega t^2)}$
(b) $\dot{f} = -\lambda/(1+\omega t)$, $f = \mathrm{const}_t - \frac{\lambda}{\omega}\ln(1+\omega t)$, $f(0) = \mathrm{const}_t = \ln(v_0) \Rightarrow v(t) = v_0\,(1+\omega t)^{-\lambda/\omega}$

⑤ (a) $v\dot{v} = \left(\frac{1}{2}v^2\right)^\bullet = -\lambda = (\mathrm{const}_t - \lambda t)^\bullet \Rightarrow v(t) = \sqrt{2(\mathrm{const}_t - \lambda t)} = \sqrt{v_0^2 - 2\lambda t}$
(b) $v^n\dot{v} = \left(\frac{1}{n+1}v^{n+1}\right)^\bullet = -\lambda = (\mathrm{const}_t - \lambda t)^\bullet \Rightarrow v(t) = \left[(n+1)(\mathrm{const}_t - \lambda t)\right]^{\frac{1}{n+1}} = \left[v_0^{n+1} - (n+1)\lambda t\right]^{\frac{1}{n+1}}$

⑥ $\vec{K} = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$, $K_1 = -\alpha x^2 \overset{!}{=} -\partial_x V = -\partial_x\left(\frac{\alpha}{3}x^3 + f(y,z)\right)$, $K_2 = \beta z \overset{!}{=} -\partial_y V = -\partial_y\left(\frac{\alpha}{3}x^3 - \beta yz + f(z)\right)$,
$K_3 = \gamma y \overset{!}{=} -\partial_z V = -\partial_z\left(\frac{\alpha}{3}x^3 - \beta yz + f(z)\right) = \beta y + f'(z) \Rightarrow \beta \overset{!}{=} \gamma$, $V = \frac{\alpha}{3}x^3 - \beta yz$

⑦ (a) $0 \overset{!}{=} (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.
$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} s-r \\ r-s \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, .. $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$ ✓, $D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
(b) $0 \overset{!}{=} (3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) - (3-\lambda)4 - (5-\lambda)4 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$, $\lambda_1 = 1$ (raten)
$= (1-\lambda)(28 - 11\lambda + \lambda^2)$, $\lambda_{2/3} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} \Rightarrow \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$, $3+4+5 = 1+4+7$ ✓

⑧ (a) $\ln(\sqrt{4+\varepsilon^2}) = \ln\left(2\sqrt{1+\varepsilon^2/4}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\varepsilon^2/4\right) = \ln 2 + \varepsilon^2/8 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$
(b) $\ln\left(2\varepsilon + \frac{(2\varepsilon)^2}{2!} + \frac{(2\varepsilon)^3}{3!} + \ldots\right) = \ln(2\varepsilon) + \ln\left(1 + \left[\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \ldots\right]\right) = \ln(2\varepsilon) + [\,] - \frac{1}{2}[\,]^2 + \ldots$
$= \ln(2\varepsilon) + \varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$
(c) $= (b)$, oder: $\varepsilon + \ln(2\sinh(\varepsilon)) = \varepsilon + \ln\left(2\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots\right) = \varepsilon + \ln(2\varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

⑨ $f = \ln(x)$, $f' = \frac{1}{x}$, $f_u = e^x$; $f_u' = \partial_x e^x = \frac{1}{f'(f_u(x))} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$

⑩ $ER^{(0)}$: $\ddot{x}^{(0)} = 0$, $\dot{x}^{(0)}(0) = 0$, $x^{(0)}(0) = a \Rightarrow x^{(0)} = a$
$ER^{(1)}$: $\ddot{x}^{(1)} = -\omega^2 a$, $\dot{x}^{(1)}(0) = 0$, $x^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow x^{(1)} = -\frac{1}{2}\omega^2 a t^2$
$ER^{(2)}$: $\ddot{x}^{(2)} = -\omega^2 x^{(1)} = +\omega^4 \frac{a}{2} t^2$, $\dot{x}^{(2)}(0) = 0$, $x^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow x^{(2)} = \omega^4 \frac{a}{2}\frac{t^4}{3 \cdot 4}$
$\Rightarrow x(t) \approx a\left[1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \frac{1}{4!}(\omega t)^4 + \ldots\right] \overset{\wedge}{=} a \cdot \cos(\omega t)$ ✓